МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
РЕГИОНАЛНО УПРАВЛЕНИЕ НА ОБРАЗОВАНИЕТО – СОФИЯ-ГРАД
София 1303, ул. „Антим I”, № 17, тел.:9356050, факс:9883937, e-mail: rio_sofia_grad@mon.bg, www.rio-sofia-grad.com

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

ОБЩИНСКИ КРЪГ – 16.12.2017 г.

16.12.2017 г.

IX КЛАС

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

Задача 1:

а) $\frac{4-x}{x+1}-\frac{x-1}{1-2x}=\frac{x^2-23}{2x^2+x-1}$

Разлага се квадратния тричлен $2x^2+x-1=(2x-1)(x+1)$. ***(0.5 точки)***

Определят се допустими стойности: $\begin{vmatrix} x \neq -1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ ***(0.5 точки)***

Уравнението е еквивалентно на $(4-x)(2x-1)+(x-1)(x+1)=x^2-23$. ***(1 точка)***

Корени на квадратното уравнение $2x^2-9x-18=0$ са $x_1=6$ и $x_2=-\frac{3}{2}$ ***(0.5 точки)***

$x_1 \in DC$ и $x_2 \in DC$ ***(0.5 точки)***

Отг: Уравнението има две решения: 6 и $-\frac{3}{2}$.

б) $\left|7-|x^2+x|\right|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 7-|x^2+x|=5 & (1) \\ 7-|x^2+x|=-5 & (2) \end{array}\right.$ ***(1 точка)***

$(1) \Leftrightarrow 7-|x^2+x|=5 \Leftrightarrow |x^2+x|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x=2 \\ x^2+x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1, x_2=-2 \\ \text{н. р. к} \end{array}\right.$

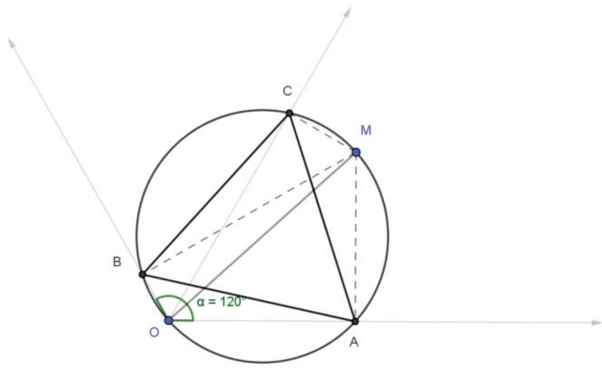
(1.5 точки)

$(2) \Leftrightarrow 7-|x^2+x|=-5 \Leftrightarrow |x^2+x|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x=12 \\ x^2+x=-12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=3, x_4=-4 \\ \text{н. р. к} \end{array}\right.$

(1.5 точки)

Отг: Уравнението има четири корена: $1;\ -2; 3$ и -4.

Задача 2:



От условието следва, че $\sphericalangle MAO = \sphericalangle MCO = \sphericalangle MBO = 90^o$,т.е. отсечката ОМ „се вижда" под прав ъгъл от точките А, В и С. Това означава, че А, В, С, М и О лежат на една окръжност с диаметър ОМ. ***(2 точки)***

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle COB = 60^0$ ***(1,5 точки)***

$\sphericalangle CBA = \sphericalangle COA = 60^0$ ***(1,5 точки)***

(като вписани ъгли, които се измерват с една и съща дъга).

Следователно триъгълник АВС е равностранен. ***(1 точка)***

Всяко друго мотивирано доказателство се оценява с пълен брой точки.

Пълен брой точки се дават и, ако някоя от т. А или т. В е върху продълженията на раменете на ъгъла и доказателство е мотивирано.

Задача 3:

а) Квадратното уравнение има реални корени при $D \geq 0$. ***(1 точка)***

Коефициентите на кв. у-ние са:

$a = 1, b = -(m^2 + 2m - 2)$ и $c = -2m^2 - 4m = -2(m^2 + 2m)$ ***(0,5 точки)***

Удобно е да се направи полагането: $m^2 + 2m - 2 = t$.

Тогава: $b = -t$ и $c = -2(t + 2)$.

Така за дискриминантата се получава $D = t^2 + 8t + 16 = (t + 4)^2 \geq 0$за всяка стойност на параметъра t

⇒Даденото параметрично квадратно уравнение има реални корени за всяка стойност на реалния параметър m. ***(1,5 точки)***

Всяко мотивирано доказателство се оценява с пълен брой точки.

б) От формулите на Виет

$$x_1 + x_2 = -\frac{m^2 + 2m - 4}{2}; x_1.x_2 = \frac{-2\left(m^2 + 2m\right)}{2}$$ ***(0,5 точки)***

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2$$ ***(1 точка)***

$$\left(-\frac{m^2+2m-4}{2}\right)^2-2\frac{-2\left(m^2+2m\right)}{2}=\frac{m^3+21}{4}$$ ***(0,5 точки)***

Преработване на уравнението до биквадратно ***(1,5 точки)***

$\Leftrightarrow m^4+4m^2-5=0$

Реалните корени на биквадратното уравнение са $m_{1/2}=\pm 1$ ***(0,5 точки)***

<u>Забележка:</u>

Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.

За всяко правилно извършено действие се дават съответните точки, независимо от верността на предхождащите го.