

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ - 16.12.2017 г.
КРАТКИ РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ
ТЕМА ЗА VIII КЛАС

Задача 1. $(x + 1)^3 + \frac{(x-1)^2+x^2}{2} > 7x^2 + (x - 1)^3$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + \frac{x^2-2x+1+x^2}{2} > 7x^2 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\frac{2x^2-2x+1}{2} > x^2 - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 > 2x^2 - 4 \Leftrightarrow -2x > -5 \text{ т.е. } x < 2,5 \quad 4 \text{ т.}$$

За всяка формула по 0,5т и 0,5т за крайния резултат, а останалите 2т се
 разпределя за преобразуване до вида $-2x > -5$.

$$\Rightarrow x \in (-\infty; 2,5) \quad 0,5$$

т.

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{8} - 2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + 2\sqrt{50} + 0,5\sqrt{72}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{2} - 3 \cdot 4\sqrt{2} + 2 \cdot 5\sqrt{2} + 0,5 \cdot 6\sqrt{2} = 14\sqrt{2} - 18\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \quad 2 \text{ т.}$$

Следователно $A < 2,5$ т.е числото A е решение на неравенството 0,5 т.

Задача 2.

А) $MNPQ$ е квадрат $\Rightarrow F$ е среда на $PQ \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$ 0,5

т.

т. P среда на $AC \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ 0,5

т.

т. Q среда на $BD \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$ 0,5

т.

Заместване и получаване на равенството 0,5

т.

Б) Доказване, че трапеца е равнобедрен 1,5

т.

Доказване, че бедрата са перпендикулярни 0,5

т.

Намиране на ъглите $45^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 135^\circ$ 1,5

т.

Намиране на лицето $\frac{a^2-b^2}{4}$ 1,5

т.

Задача 3. А) $C_{10}^4 \cdot C_{15}^4 = 286650$ (3т.) Б) $C_{10}^8 + C_{10}^7 \cdot C_{15}^1 + C_{10}^6 \cdot C_{15}^2 + C_{10}^5 \cdot C_{15}^3$

(4т.)

Решение: А) В групата да има по равен брой момчета и момичета. Трябва да се изберат 4 момчета измежду 10 общо и 4 момичета измежду 15 общо.

Прилагаме правилото за умножение на възможности и получаваме:

$$C_{10}^4 \cdot C_{15}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 286650 \quad 3\text{т.}$$

Б) В групата да има повече момчета, отколкото момичета. Групата се състои от: 8

момчета, **или**

7 момчета **и** 1 момиче, **или** 6 момчета **и** 2 момичета, **или** 5 момчета **и** 3

момичета. Прилагаме правилата за събиране (при **или**) и умножение (при **и**) на

възможности и получаваме:

$$\begin{aligned} C_{10}^8 + C_{10}^7 \cdot C_{15}^1 + C_{10}^6 \cdot C_{15}^2 + C_{10}^5 \cdot C_{15}^3 &= \\ = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{8!} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7!} \cdot \frac{15}{1} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6!} \cdot \frac{15 \cdot 14}{2!} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} & \quad 4т. \end{aligned}$$

Забележка:

Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.

За всяко правилно извършено действие се дават съответните точки, независимо от верността на предхождащите го.