София 1303, ул. „Антим I", № 17, тел.:9356050, факс:9883937, e-mail: rio_sofia_grad@mon.bg, www.rio-sofia-grad.com

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

ОБЩИНСКИ КРЪГ – 16.12.2017 г.

ТЕМА ЗА XII КЛАС

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

<u>Зад.1</u> $\prod=\left[x_1^2-\left(y_1+y_2\right)x_1+y_1.y_2\right].\left[x_2^2-\left(y_1+y_2\right)x_2+y_1.y_2\right]$ **2 точки**

От формулите на Виет $\begin{matrix} y_1+y_2=-b \\ y_1.y_2=c \end{matrix}$ и заместваме **1 точка**

$$\prod=\left[x_1^2+bx_1+c\right].\left[x_2^2+bx_2+c\right]=$$

$$=x_1^2x_2^2+bx_1^2x_2+cx_1^2+bx_1x_2^2+b^2x_1x_2+bcx_1+cx_2^2+bcx_2+c^2=$$
$$=x_1^2x_2^2+bx_1.x_2\left(x_1+x_2\right)+c\left(x_1^2+x_1^2\right)+b^2x_1x_2+bc\left(x_1+x_2\right)+c^2$$ **1 точка**

От формулите на Виет $\begin{matrix} x_1+x_2=-p \\ x_1.x_2=q \end{matrix}$, $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$ **1,5 точки**

Заместваме и получаваме $\prod=q^2-bpq+c\left(p^2-2q\right)+b^2q-bcp+c^2$ **1 точка**

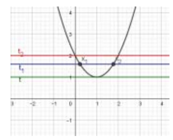
$\prod=q^2-bpq+cp^2-2cq+b^2q-bcp+c^2$ **0,5 точки**

<u>Зад.2</u>. Полагаме: $x^2-2x+2=t$ **0,5 точки**

Разглеждаме уравнението $t^2-mx+3=0$ с корени t_1 и t_2 (1)От всяко едно от уравненията: $x^2-2x+2=t_1$ и $x^2-2x+2=t_2$ (2) трябва да бъдат получени по два различни положителни корена. **1 точка**

Разглеждаме графиката на функцията $y = x^2 - 2x + 2$

За направени **разсъждения по графиката или аналитично**, че за да има всяко едно от уравненията (2) по два различни положителни корена, корените t_1 и t_2 на уравнение (1) трябва да са различни и да са в интервала (1;2) **2 точки**



За получаване на системата 1 точка

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(1) > 0 \\ f(2) > 0 \\ 1 < \dfrac{m}{2} < 2 \end{cases}$$

За решаване на системата 2 точки (за всяко правилно решено неравенство по 0,5 т.)

За отг.: $m \in \left(2\sqrt{3}; \dfrac{7}{2}\right)$ **0,5 точки**

<u>**Зад.3**</u>. Да означим $\sphericalangle(AC, BC_1) = \varphi$

От $AD_1 \parallel BC_1$ следва, че $\varphi = \sphericalangle CAD_1 = 60^o$, защото ΔACD_1 е равностранен с дължина на страната $\sqrt{6}$. **2 точки**

Освен това равнината ACD_1 съдържа правата AC и е успоредна на правата BC_1, така че търсеното разстояние d е равно на разстоянието от точка B до тази равнина. **2 точки**

Сега можем да определим d от равенствата:

$\frac{1}{3}S_{ABC}.D_1D = V_{ABCD_1} = \frac{1}{3}S_{ACD_1}.d$ От последните равенства получаваме: $d=1$ **3 точки**

<u>Забележка:</u>

Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.

За всяко правилно извършено действие се дават съответните точки, независимо от верността на предхождащите го.