МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
**РЕГИОНАЛНО УПРАВЛЕНИЕ НА ОБРАЗОВАНИЕТО – СОФИЯ-ГРАД**
София 1303, ул. „Антим I", № 17, тел.:9356050, факс:9883937, e-mail: rio_sofia_grad@mon.bg, www.rio-sofia-grad.com

# НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

## ОБЩИНСКИ КРЪГ – 16.12.2017 г.

## ТЕМА ЗА XI КЛАС

## ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

**Задача 1.**

Първо ще намерим b. От $\div 20, b_2, \dots, b_{n-1}, 80$ следва, че $\frac{b_1+d}{b_1+(n-2)d} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{20+d}{20+(n-2)d} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$ $d = \frac{40}{n-5}, n \neq 5$. **( 2 т. )**

От друга страна $80 = 20 + (n-1)d \Leftrightarrow d = \frac{60}{n-1}, n \neq 1$. **( 2 т.)**

От тук получаваме $\frac{40}{n-5} = \frac{60}{n-1} \Leftrightarrow n = 13$, откъдето следва, че $b = 11$. **( 1 т. )**

Сега $a_n = 3n + 11$ и $a_{30} + a_{32} + a_{34} + \dots + a_{50} =$

$$3(30 + 32 + 34 + \dots + 50) + 11.11 =$$

$= 3\frac{(30+50)11}{2} + 121 = 120.11 + 121 = 1441$. **( 2 т.)**



**Задача 2**. $\measuredangle CBD = \measuredangle ADB$ като кръстни ъгли. **( 1 т. )** Тогава $\Delta ABN \sim \Delta DBA \Longrightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{NB}{AB} \Leftrightarrow$
$AB^2 = NB.DB$. (1) **( 2 т. )**

От подобието на $\Delta ADN \sim \Delta MBN \Longrightarrow$
$\frac{NB}{ND} = \frac{1}{2}$ $(BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD)$. **( 1 т. )**

Тогава $NB = \frac{1}{3}BD$ и от (1) получаваме

$AB = \frac{\sqrt{3}}{3}BD$, т.е $\frac{AB}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **( 1т. )**

Сега от синусовата теорема за $\Delta ABD$: $\frac{AB}{\sin\varphi} = \frac{BD}{\sin 60^0}$ ($\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 60^0$ като ъгли в успоредник), откъдето следва $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, т.е. $\varphi = 30^0$ ($\varphi < 60^0$). **( 2 т. )**

**Задача 3.** Ако означим страните на $\triangle ABC$ с $a, aq$ и $aq^2; a > 0, q > 0$.

I сл. Ако прогресията е растяща, т.е. $q > 1$.

За да може да се построи триъгълник с такива страни , достатъчно е $a + aq > aq^2$

$\Leftrightarrow aq^2 - aq - a < 0 / : a > 0$

$q^2 - q - 1 < 0$

$D = 5$

$q \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Но $q>1 \Rightarrow q \in \left(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

II сл. Ако $0<q<1$,т.е. прогресията е намаляваща, достатъчното условие да съществува триъгълник с такива страни е

$aq^2+aq>a$

$\Leftrightarrow aq^2+aq-a>0/:a>0$

$q^2+q-1>0$

$D=5$

$q \in \left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

Но $0<q<1 \Rightarrow q \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right)$

III сл. Ако $q=1$, то триъгълника е равностранен.

$$\Rightarrow q \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};1\right) \cup \{1\} \cup \left(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Отг.

$$\Leftrightarrow q \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$



**За първи случай- 2,5 т.**
**За втори случай-2,5 т.**
**За трети случай-1 т.**
**За отговор - 1 т.**

***<u>Забележка:</u>***

***Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.***

***За всяко правилно извършено действие се дават съответните точки, независимо от верността на предхождащите го.***