МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
РЕГИОНАЛНО УПРАВЛЕНИЕ НА ОБРАЗОВАНИЕТО – СОФИЯ-ГРАД
София 1303, ул. „Антим I”, № 17, тел.:9356050, факс:9883937, e-mail: rio_sofia_grad@mon.bg, www.rio-sofia-grad.com

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 16.12.2017 г.
16.12.2017 г.

X КЛАС

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

<u>Задача 1</u>. Графиките на функциите $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = 1 + x$ се пресичат в точките A и B. Графиката на $f(x)$ е парабола с връх точка V(2,5; - 0,25) и минава през точка M(0; 6)
.
а) Намерете стойностите на коефициентите a, b и c.
б) Намерете лицето на триъгълник ABV.

Решение:

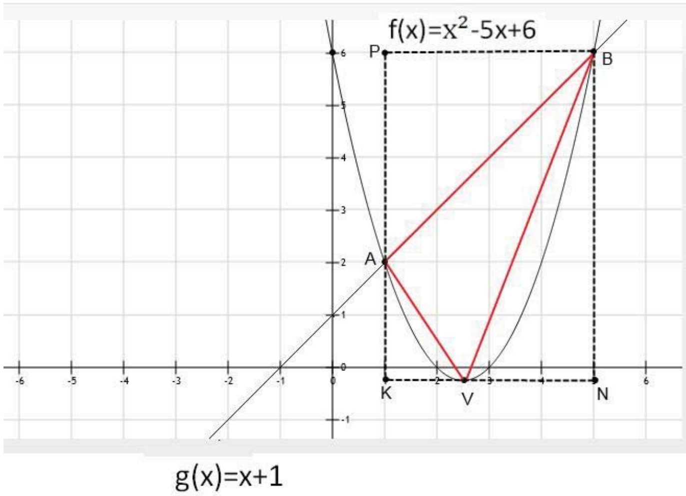
а) $f(0)=6 \Rightarrow c=6$ **(0,5т)** , $x_0= -\frac{в}{2a}=2,5 \Rightarrow в=-5a$ **(0,5т.)**,

$f(2,5)= -0,25 \Rightarrow \frac{25}{4}a+\frac{5}{2}в+c= -\frac{1}{4}$ **(1т.)**

$в=-5a$
$\frac{25}{4}a+\frac{5}{2}в+c= -\frac{1}{4}$
$a=1,\ в=-5$ (**1**т.) $\Rightarrow f(x)=x^2-5x+6$

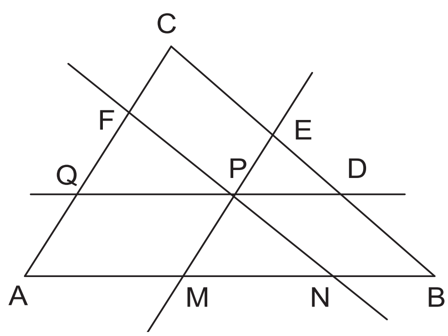
б) $x^2-5x+6=1+x \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=5 \Rightarrow y_1=2,\ y_2=6 \Rightarrow A(1,2),\ B(5,6)$ **(1т.)**

$S_{ABV}=S_{KNBP}-(S_{AKV}+S_{VNB}+S_{BPA})=4.6,25-\left(\frac{1,5.2,25}{2}+\frac{6,25.2,5}{2}+\frac{4.4}{2}\right)=7,5$ **(3т.)**



Ако се използва трапеца KNBP, а не правоъгълника и решението е вярно, се дават пълен брой точки.

Задача 2



Нека пресечните точки на правите със страните

са както е означено на чертежа и нека

$S_{\triangle PMN} = s_1, S_{\triangle DPE} = s_2, S_{\triangle PFQ} = s_3, S_{\triangle ABC} = s$.

От успоредността получаваме, че

$\triangle MNP \sim \triangle ABC \Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{\sqrt{s_1}}{\sqrt{s}}$, аналогично **1 т.**

$\triangle PDE \sim \triangle ABC \Rightarrow \dfrac{PD}{AB} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{\sqrt{s_2}}{\sqrt{s}}$ **1 т.**

$\triangle QPE \sim \triangle ABC \Rightarrow \dfrac{QP}{AB} = \dfrac{FQ}{AC} = \dfrac{\sqrt{s_3}}{\sqrt{s}}$, но **1 т.**

$AMPQ$ е успоредник $\Rightarrow AM = QP$, $NBDP$ е успоредник $\Rightarrow PD = NB$. **1 т.**

Получаваме $\frac{MN}{AB} + \frac{PD}{AB} + \frac{QP}{AC} = \frac{MN + NB + AM}{AB} = 1 \Rightarrow$ **1 т.**

$\frac{\sqrt{s_1}}{\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{s_2}}{\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{s_3}}{\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} + \sqrt{s_3}}{\sqrt{s}} = 1$ **1 т.**

Заместваме и получаваме: $S_{\triangle ABC} = \left(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} + \sqrt{s_3}\right)^2$ **1 т.**

Задача 3. а)Намерете сбора на целите числа , които са решения и на двете неравенства:
$\frac{|2x^2+5x-4|}{x^2+2} \geq 1$ и $\frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3} \leq 0$

б) Намерете стойностите на реалния парамерър m , за които корените x_1 и x_2 на квадратното уравнението $(m-2)x^2$-6mx+2=0 удовлетворяват условието $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 2$

Решение:

$\frac{|2x^2+5x-4|}{x^2+2} \geq 1 \Rightarrow$ тъй като $x^2+2>0$ и $|2x^2+5x-4| \geq 0$, за $\forall$ x $\Rightarrow |2x^2 + 5x - 4| \geq x^2 + 2$

$\Rightarrow \quad (2x^2 + 5x - 4)^2 \geq ((x^2 + 2)^2 \Rightarrow$

$(2x^2 + 5x - 4)^2 - (x^2 + 2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x^2 + 5x - 6)(3x^2 + 5x - 2) \geq 0 \Rightarrow$

$3(x+6)(x-1)(x+2)(x - \frac{1}{3}) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -6] \cup \left[-2; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty)$ (1) **(1,5 т.)**

$\frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3} \leq 0 \Rightarrow x \epsilon (1;3) \cup (3;4]$ (2) **(1 т.)**

От (1) и (2) $x \epsilon (1;3) \cup (3;4] \Rightarrow$ Отг. 6 **(0,5 т.)**

б) $(m-2)x^2$-6mx+2=0

$x_1 + x_2 = \frac{6m}{(m-2)}$, $x_1 . x_2 = \frac{2}{m-2}$ **(0,5 т.)**

За съставяне на системата **(1 т.)**

$$\left|\begin{array}{l} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 2 \\ m-2 \neq 0 \\ D \geq 0 \end{array}\right.$$

За преобразуване на неравенството $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\leq 2$ до вида $\frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}\leq 2$ или до друго еквивалентно неравенство **(0,5 т.)**

За решаване на системата $m\epsilon(-\infty;2)$ **(2 т.)**

Забележка:

Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.

За всяко правилно извършено действие се дават съответните точки, независимо от верността на предхождащите го.