ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА– 16.12.2017 г.

Кратки решения и примерни критерии за оценяване - IX клас

Задача 1: а) $\frac{4-x}{x+1}-\frac{x-1}{1-2x}=\frac{x^2-23}{2x^2+x-1}$

Разлага се квадратният тричлен $2x^2+x-1=(2x-1)(x+1)$. *(0.5 точки)*

Определят се допустими стойности: $\left| \begin{array}{l} x \neq -1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{array} \right.$ *(0.5 точки)*

Уравнението е еквивалентно на $\frac{(4-x)(2x-1)+(x-1)(x+1)-(x^2-23)}{(2x-1)(x+1)}=0$. *(1 точка)*

Корени на квадратното уравнение $2x^2-9x-18=0$са $x_1=6$ и $x_2=-\frac{3}{2}$ и са допустими за даденото дробно уравнение. *(1 точка)*

Отг: Уравнението има два корена: 6 и $-\frac{3}{2}$.

б) $\left|7-|x^2+x|\right|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 7-|x^2+x|=5 & (1) \\ 7-|x^2+x|=-5 & (2) \end{array} \right.$ *(1 точка)*

$(1) \Leftrightarrow 7-|x^2+x|=5 \Leftrightarrow |x^2+x|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x=2 \\ x^2+x=-2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1, x_2=-2 \\ \text{н. р. к} \end{array} \right.$

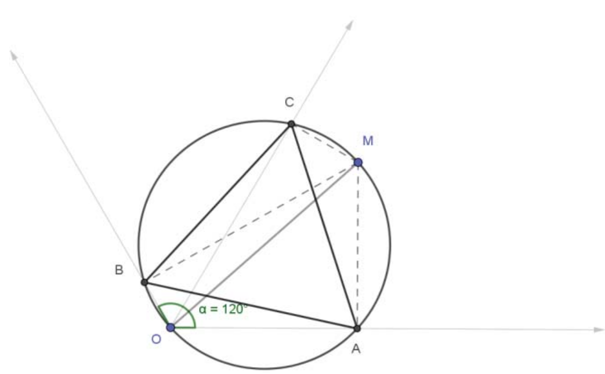
(1.5 точки)

$(2) \Leftrightarrow 7-|x^2+x|=-5 \Leftrightarrow |x^2+x|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x=12 \\ x^2+x=-12 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=3, x_4=-4 \\ \text{н. р. к} \end{array} \right.$

(1.5 точки)

Отг: Уравнението има четири корена: $1;\ -2; 3$ и -4.

Задача 2: Нека т.С е петата на перпендикуляра към ъглополовящата.



За построяване на перпендикулярите *(1 точка)*

От условието следва, че $\sphericalangle MAO=\sphericalangle MCO=\sphericalangle MBO=90^o$,т.е. отсечката ОМ „се вижда” под прав ъгъл от точките А, В и С. Това означава, че А, В, С, М и О лежат на една окръжност с диаметър ОМ.

$\sphericalangle CAB=\sphericalangle COB=60^o$, $\sphericalangle CBA=\sphericalangle COA=60^o$ (като вписани ъгли, които се измерват с една и съща дъга).

Следователно триъгълник АВС е равностранен. *(6 точки)*

Всяко мотивирано доказателство се оценява с пълен брой точки.

Задача 3: а) Квадратното уравнение има реални корени при $D \geq 0$. *(1 точка)*

Коефициентите на кв. у-ние са:

$a = 1, b = -(m^2 + 2m - 2)$ и $c = -2m^2 - 4m = -2(m^2 + 2m)$ *(0,5 точки)*

Удобно е да се направи полагането: $m^2 + 2m - 2 = t$.

Тогава: $b = -t$ и $c = -2(t + 2)$.

Така за дискриминантата се получава $D = t^2 + 8t + 16 = (t + 4)^2 \geq 0$за всяка стойност на параметъра t

$\Rightarrow$ Даденото параметрично квадратно уравнение има реални корени за всяка стойност на реалния параметър m. *(1,5 точки)*

Всяко мотивирано доказателство се оценява с пълен брой точки.

б) от формулите на Виет $x_1 + x_2 = \frac{m^2+2m-2}{1}$ *(0,5 точки)*

$x_1.x_2 = \frac{-2(m^2+2m)}{1}$ *(0,5 точки)*

Тогава $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2$ *(0,5 точки)*

Получаваме уравнението $(m^2 + 2m - 2)^2 - 2(-2m^2 - 4m) = 4m^3 + 9$ *(0,5 точки)*

$\Leftrightarrow m^4 + 4m^2 - 5 = 0.$ *(1 точка)*

Корени на биквадратното уравнение са $m_{1,2} = \pm 1$. *(1 точка)*

За $m_{1,2} = \pm 1$равенството е вярно.

Забележка: Всяко друго ***вярно*** *и* ***пълно*** *описание на решението на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.*

За областен кръг се класират ученици, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.