

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА- 16.12.2017 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване - VIII клас

**Задача 1.** Пресметнато  $a = 1$

2 т.

$$\frac{x-a}{6} + \frac{3}{2}x^2 \geq \frac{(3x+2)^2}{6} - 2a \Leftrightarrow \frac{x-a}{6} + \frac{3x^2}{2} \geq \frac{9x^2 + 12x + 4}{6} - 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - a + 9x^2 \geq 9x^2 + 12x + 4 - 12a \Leftrightarrow -11x \geq 4 - 11a \Leftrightarrow x \leq \frac{11a - 4}{11}$$

$$a = 1 \Rightarrow x \leq \frac{11 \cdot 1 - 4}{11} \Rightarrow x \leq \frac{7}{11}$$

4 т.

$$m = \sqrt{\frac{49}{121}} = \sqrt{\left(\frac{7}{11}\right)^2} = \frac{7}{11} \in \left(-\infty; \frac{7}{11}\right] \text{ е решение.}$$

1 т.

**Задача 2. а)**  $ABCD$  – успоредник  $\Rightarrow AC \cap BD = \text{т. } O$  – среда за  $AC$  и  $BD$ .

0,5 т.

Тогава в  $\triangle ABC$   $BO$  и  $AM$  са медиани.  $\Rightarrow G$  е медицентър и  $\frac{BG}{GO} = \frac{2}{1}$

1 т.

$$\Rightarrow BG = 2d, OG = d \Rightarrow DO = BO = 3d \text{ т.е. } GD = 4d \Rightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{1}{2}.$$

1,5 т.

**б)**  $OM$  е средна отсечка в  $\triangle BCD \Rightarrow OM \parallel DC$  и  $OM = \frac{1}{2}DC$ ,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}$

1 т.

$G$  е медицентър и  $\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

2 т.

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG} = -\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$$

1 т.

**Задача 3. а)** В групата да има по равен брой момчета и момичета. Трябва да се изберат 4 момчета измежду 10 общо и 4 момичета измежду 15 общо.

Прилагаме правилото за умножение на възможности и получаваме:

$$C_{10}^4 \cdot C_{15}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 286650$$

3 т.

**б)** В групата да има повече момчета, отколкото момичета. Групата се състои от: 8 момчета, **или** 7 момчета и 1 момиче, **или** 6 момчета и 2 момичета, **или** 5 момчета и 3 момичета. Прилагаме правилата за събиране (при **или**) и умножение (при **и**) на възможности и получаваме:

$$C_{10}^8 + C_{10}^7 \cdot C_{15}^1 + C_{10}^6 \cdot C_{15}^2 + C_{10}^5 \cdot C_{15}^3 =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{8!} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7!} \cdot \frac{15}{1} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6!} \cdot \frac{15 \cdot 14}{2!} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!}$$

4 т.

**Оценяването е примерно.** Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максимален брой точки.

За областен кръг се класират ученици, получили минимум 16 точки.