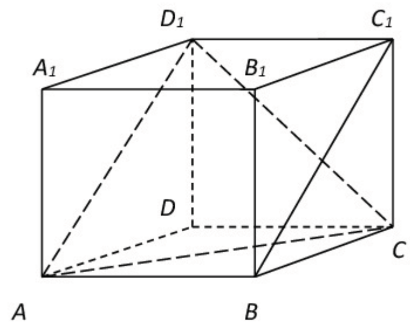
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА– 16.12.2017 г.

Кратки решения и примерни критерии за оценяване - XII клас

Задача 1: Да означим $\sphericalangle(AC, BC_1) = \varphi$.

От $AD_1 // BC_1$ следва, че $\varphi = \sphericalangle CAD_1 = 60^o$, защото ΔACD_1 е равностранен с дължина на страната $\sqrt{6}$. **(2 точки).** Освен това равнината ACD съдържа правата AC и е успоредна на правата BC_1, така че търсеното разстояние d е равно на разстоянието от точка B до тази равнина. **(2 точки)**



Сега можем да определим d от равенствата:

$\frac{1}{3}S_{ABC}.D_1D = V_{ABCD_1} = \frac{1}{3}S_{ACD_1}.d$ От последните равенства получаваме: $d=1$ **(3 точки)**

Задача 2: Нека пирамидата е ABCDM (т. M е върхът, а основата е квадратът ABCD с основен ръб b). Нека точка N е средата на ръба BC, тогава:

От Δ CMN => $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{k}$ **0.5 точки,** $k = \frac{b}{2tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{b.cotg\frac{\alpha}{2}}{2}$ **0.5 точки,**

От Δ OMN => $k^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}$ **0.5 точки,** $\frac{b^2.cotg^2\frac{\alpha}{2}}{4} = b^2 + \frac{b^2}{4}$ **0.5 точки,**

$b^2.cotg^2\frac{\alpha}{2} - b^2 = 4h^2$ **0.5 точки,** $b^2(cotg^2\frac{\alpha}{2} - 1) = 4h^2$ **0.5 точки,**

$b = \frac{2h}{\sqrt{cotg^2\frac{\alpha}{2}-1}}$ **0.5 точки,** $B = b^2 = \frac{4h^2}{cotg^2\frac{\alpha}{2}-1}$ **0.5 точки,**

$\Rightarrow V = \frac{4h^3}{3(cotg^2\frac{\alpha}{2}-1)}$ **1 точка,** $S_1 = B + S = b^2 + 4S_{BCM} = \frac{4h^2}{cotg\frac{\alpha}{2}-1}$. **1 точка**

За осигуряване на допустимите стойности на α $\left(\alpha\epsilon(0°; 90°)\right)$ **1 точка**

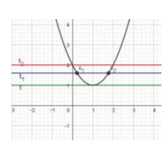
Задача 3: Полагаме: $x^2 - 2x + 2 = t$ **1 точка**

Разглеждаме уравнението $t^2 - mx + 3 = 0$ с корени t_1 и t_2 **(1)**

От всяко едно от уравненията: $x^2 - 2x + 2 = t_1$ и $x^2 - 2x + 2 = t_2$ **(2)** трябва да бъдат получени по два положителни корена. **1 точка**

Разглеждаме графиката на функцията $y = x^2 - 2x + 2$. За направени разсъждения, че корените на уравнение **(1)** $t_{1,2} \in (1;2)$ за да има всяко едно от уравненията **(2)** по два положителни корена **3 точки**

За получаване на системата:



$$\begin{cases} D > 0 \\ f(1) > 0 \\ f(2) > 0 \\ 1 < \dfrac{m}{2} < 2 \end{cases}$$

1 точка

Отг.: $m \in \left(2\sqrt{3}; \dfrac{7}{2}\right)$ **1 точка**

Забележка: Всяко друго ***вярно*** *и* ***пълно*** *описание на решението на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.*

За областен кръг се класират ученици, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.