ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА– 16.12.2017 г.

Кратки решения и примерни критерии за оценяване - 10 клас

Задача 1. а) $D \geq 0 \quad (a+1)^2 - 4(a^2 - a - 2) \geq 0, -3a^2 + 6a + 9 \geq 0,$ 1 т.

$a^2 - 2a - 3 \leq 0, a \in [-1;3]$ 1 т.

б) $M = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 + 4, M = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 4$

$M = (a+1)^2 - 2(a^2 - a - 2) - 3(a+1) + 4, M = -a^2 + a + 6$ 1 т.

$M = f(a) = -a^2 + a + 6, \quad a \in [-1;3]$ 1 т.

$a_0 = \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \in [-1;3]$

$\Rightarrow \underset{a \in [-1;3]}{Max} M = f\left(\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{4}$ 1 т.

$f(-1) = 4. \ f(3) = 0$

$\Rightarrow \underset{a \in [-1;3]}{Min} M = 0$ 2 т.

Задача 2. а) При $a = 0$ решаваме неравенството

$\frac{x^2 - 3}{x(x + \sqrt{3})} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{x(x + \sqrt{3})} \geq 0 \Leftrightarrow$ 1 т.

$\begin{cases} x \neq -\sqrt{3}, 0 \\ \frac{(x - \sqrt{3})}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ 1 т.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; 0) \cup [\sqrt{3}; +\infty)$ 1 т.

б) Неравенството $f(x) > 0$ се свежда до $(a+1)x^2 - 4ax + 5a - 3 > 0$

1) $a + 1 = 0, \quad a = -1, 4x - 8 > 0, \quad x > 2 \quad \Rightarrow a = -1$ е решение 1 т.

2) $a + 1 > 0$ - не е възможно всички решения да са положителни 0,5 т.

*Забележка: Всяко друго **вярно** и **пълно** описание на решението на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.*

За областен кръг се класират ученици, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.

3) $a+1<0$

$$\left|\begin{array}{l} a+1<0 \\ D>0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1x_2\geq 0 \qquad 0{,}5 \text{ т.} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} a<-1 \\ -a^2-2a+3>0 \\ \dfrac{4a}{a+1}>0 \\ \dfrac{5a-3}{a+1}\geq 0 \qquad 0{,}5 \text{ т.} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} a\in(-\infty;-1) \\ a\in(-3;1) \\ a\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty) \\ a\in(-\infty;-1)\cup\left[\dfrac{3}{5};+\infty\right) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad a\in(-3;-1) \qquad 1 \text{ т.}$$

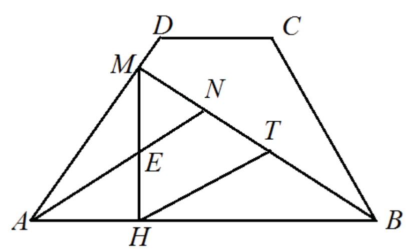
Отговор: $a\in(-3;-1]$ 0,5 т.

Задача 3. а) Нека $AD\cap BC=P$. BM е ъглополовяща и височина в Δ ABP $\Rightarrow$ AM = MP 1 т.

Означаваме $DM=x\Rightarrow AM=3x, DP=2x$.

$$\Delta \text{ DCP} \sim \Delta \text{ ABP} \Rightarrow \frac{S_{\Delta DCP}}{S_{\Delta ABP}}=\left(\frac{PD}{PA}\right)^2=\left(\frac{2x}{6x}\right)^2=\frac{1}{9} \qquad 1 \text{ т.}$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{S\Delta ABP}}=\frac{8}{9}\Rightarrow\frac{S_{ABCD}}{2S_{\Delta ABM}}=\frac{8}{9}\Rightarrow\frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta ABM}}=\frac{16}{9}\Rightarrow\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{BCDM}}=\frac{9}{7} \qquad 1 \text{ т.}$$



б) Последователно пресмятаме

$AB=10\,cm, AH=3{,}6\,cm, BH=6{,}4\,cm$ 1 т.

За намиране дължината на MN: 2 т.

Построяваме HT ‖ AN (T ∈ BM)

От теоремата на Талес $\dfrac{BT}{TN}=\dfrac{BH}{HA}=\dfrac{16}{9}, \ \dfrac{TN}{NM}=\dfrac{HE}{EM}=\dfrac{1}{1}$

$$\Rightarrow MN=\frac{9}{34}BM=\frac{36}{17}cm \qquad 1 \text{ т.}$$

Забележка: Всяко друго ***вярно*** *и* ***пълно*** *описание на решението на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.*

За областен кръг се класират ученици, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.