

Международно състезание “Европейско Кенгуру”

23 март 2013 г.

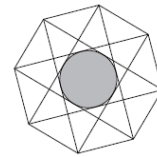
ТЕМА за 11 и 12 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. **ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути.** Пожелаваме Ви успех!

1. Кое от следващите числа е най-голямо?

- A) 2013 B) 2^{0+13} C) 20^{13} D) 201^3 E) 20.13

2. Страните на правилния осмоъгълник на фигурата в дясно имат дължина 10. Каква е дължината на радиуса на окръжността, вписана в малкия осмоъгълник, образуван от диагоналите на големия?



- A) 10 B) 7,5 C) 5 D) 2,5 E) 2

3. Призма има общо 2013 стени. Колко ръба има призмата?

- A) 2011 B) 2013 C) 4022 D) 4024 E) 6033

4. Кубичният корен на 3^{3^3} е равен на:

- A) 3^3 B) 3^{3^3-1} C) 3^{2^3} D) 3^{3^2} E) $(\sqrt{3})^3$

5. 2013-та година има свойството, че е число, съставено от последователни цифри: 0, 1, 2 и 3. Колко пълни години са изминали от последната година, която е число с четири последователни цифри?

- A) 467 B) 527 C) 581 D) 693 E) 990

6. Нека f е линейна функция, за която $f(2013) - f(2001) = 100$. Каква е стойността на разликата $f(2031) - f(2013)$?

- A) 75 B) 100 C) 120 D) 150 E) 180

7. Известно е, че $2 < x < 3$. Колко от следващите твърдения са верни?

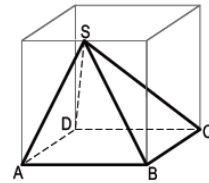
$4 < x^2 < 9$ $4 < 2x < 9$ $6 < 3x < 9$ $0 < x^2 - 2x < 3$


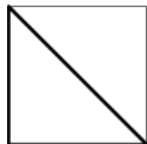
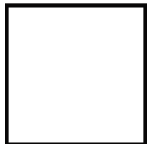

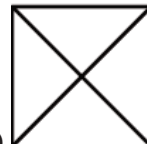
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8. Шестима супергерои хванали 20 злодея. Първият супергерой хванал един злодей, вторият хванал двама злодеи, а третият хванал трима злодеи. Четвъртият супергерой хванал повече злодеи от всеки от останалите петима. Колко най-малко злодеи може да е хванал четвъртият супергерой?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

9. В куба отлясно се вижда непрозрачна пирамида $ABCD S$ с основа $ABCD$ и връх S , съвпадащ със средата на ръба на куба. Пирамидата се наблюдава отгоре, отдолу, отзад, отпред, отляво и отлясно. Кой изглед не е възможен?

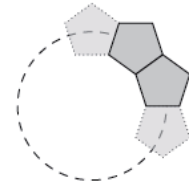


- A)  B)  C)  D)  E) 

10. При разтапяне на материала от случайно открит извънземен кораб обемът на материала се увеличава с $\frac{1}{12}$. С каква част се намалява обемът на материала, когато той се втвърди отново?

- A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{13}$ E) $\frac{1}{14}$

11. Радой има няколко еднакви плочки с формата на правилен петобъгълник. Той залепва плочките по страните така, че да покрие окръжност, както е показано на чертежа. С колко плочки може Радой да покрие окръжността?

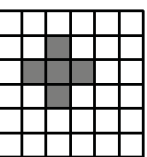
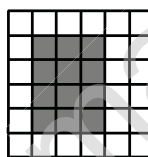
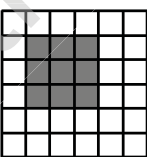
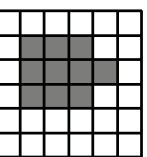
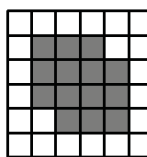


- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

12. Колко са естествените числа n , за които $\frac{n}{3}$ и $3n$ са трицифрени числа?

- A) 12 B) 33 C) 34 D) 100 E) 300

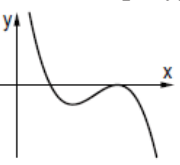
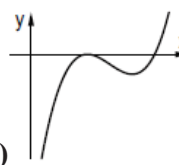
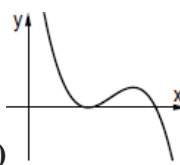
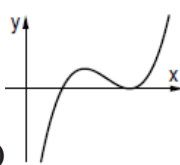
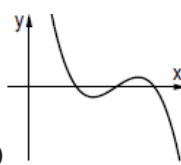
13. Кръгъл килим е поставен върху под, покрит с квадратни плочки. Всички плочки, които имат повече от една обща точка с килима, са затъмнени. Кой от следващите случаи не е възможен?

- A)  B)  C)  D)  E) 

14. Разглеждаме следното съждение за функцията f , дефинирана върху множеството на естествените числа: „За всяко четно x , $f(x)$ е четно“. Кое е отрицанието на това съждение?

- A) За всяко четно x , $f(x)$ е нечетно; B) За всяко нечетно x , $f(x)$ е четно;
C) За всяко нечетно x , $f(x)$ е нечетно; D) Съществува четно x , за което $f(x)$ не е четно;
E) Съществува нечетно число x , за което $f(x)$ е нечетно.

15. Дадена е функцията $W(x) = (a-x)(b-x)^2$, където $a < b$. Нейната графика е на една от следващите фигури. Коя е тя?

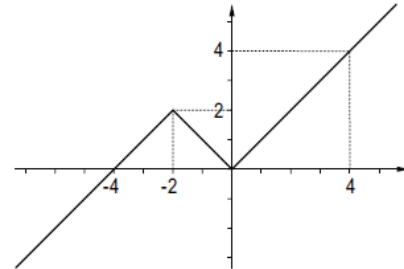
- A)  B)  C)  D)  E) 

16. Една от страните на правоъгълник има дължина 5. Правоъгълникът се разрязва на квадрат и правоъгълник, единият от които има лице 4. Колко са възможностите за изходния правоъгълник?

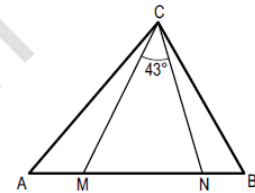
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17. Владимир начертал графиката на функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, съставена от два лъча и една отсечка (вж. чертежа). Колко решения има уравнението $f(f(f(x))) = 0$?

- A) 4 B) 3 C) 2
D) 1 E) 0



18. В триъгълник ABC точките M и N от страната AB са такива, че $AN = AC$ и $BM = BC$. Да се намери $\sphericalangle ACB$, ако $\sphericalangle MCN = 43^\circ$.



- A) 86° B) 89° C) 90° D) 92° E) 94°

19. Колко двойки (x, y) от цели положителни числа удовлетворяват уравнението $x^2 y^3 = 6^{12}$?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) Друг отговор

20. Кутия съдържа 900 карти, номерирани от 100 до 999. Кои да е две карти съдържат различни числа. Филип избира няколко карти и намира сумите от цифрите върху всяка от тях. Колко карти трябва да избере Филип без да гледа, за да е сигурен, че три от картите ще съдържат числа с една и съща сума на цифрите?

- A) 51 B) 52 C) 53 D) 54 E) 55

21. Колко са двойките от цели числа (x, y) , за които $x \leq y$ и $xy = 5(x + y)$?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

22. Нека $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е функция, притежаваща следните свойства: f е периодична с период 5 и в интервала $[-2, 3)$ е изпълнено равенството $f(x) = x^2$. На колко е равна стойността $f(2013)$?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 9

23. Намерете минималния брой хорди в дадена окръжност, за които броят на пресечните им точки във вътрешността на окръжността е по-голям от 50.

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

24. Колко реални решения (x, y) има уравнението $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

- A) 1 B) 5 C) 8 D) 9 E) Безброй много

25. Нека $f(n)$ е функция, дефинирана в множеството на целите неотрицателни числа, като $f(n) = \frac{n}{2}$ при четно n и $f(n) = \frac{n-1}{2}$ при нечетно n . За всяко естествено число k с $f^k(n)$ означаваме $f(f(\dots f(n)\dots))$, където функцията f се появява k пъти. Броят на решенията на уравнението $f^{2013}(n) = 1$ е

- A) 0 B) 4026 C) 2^{2012} D) 2^{2013} E) Безброй много

26. В равнината са дадени няколко прави. Правата a пресича точно три от останалите прави, правата b пресича точно четири от останалите прави, а правата c пресича точно n от останалите прави, като $n \neq 3, 4$. Определете броя на всички прави.

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) Друг отговор

27. Сумата на първите n естествени числа е трицифрено число, всички цифри на което са еднакви. Намерете сумата от цифрите на n .

- A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

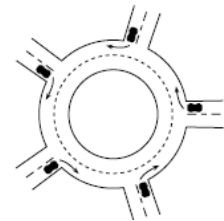
28. На острова на Рицарите и Измамниците живеят само два вида хора: Рицари, които винаги казват истината и Измамници, които винаги лъжат. Аз срещнах двама, които живеят там, и попитах по-високия от тях дали и двамата са Рицари. Той ми отговори, но аз не можах да разбера кой какъв е. Тогава попитах по-ниския дали по-високият е Рицар. Той ми отговори и аз разбрах кой какъв е. Какви хора съм срещнал?

- A) Двамата са Рицари;
 B) Двамата са Измамници;
 C) По-високият е Рицар, а по-ниският е Измамник;
 D) По-високият е Измамник, а по-ниският е Рицар;
 E) Дадената информация не е достатъчна, за да се определи кой какъв е.

29. Юлиан написал алгоритъм, който създава редица от числа със свойствата: $a_1 = 1$, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, където m и n са произволни естествени числа. Да се намери стойността на a_{100} .

- A) 100 B) 1000 C) 2012 D) 4950 E) 5050

30. В кръговото движение, показано на фигурата, се включват пет автомобили по едно и също време от различни посоки. Всеки автомобил изминава път, по-къс от една пълна обиколка, като никои два автомобиля не напускат кръговото движение в една и съща посока. По колко различни начина могат автомобилите да напуснат кръговото движение?



- A) 24 B) 44 C) 60 D) 81 E) 120