РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ПЛЕВЕН

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ И КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ТЕМИТЕ ОТ ОБЩИНСКИ КРЪГ НА НАЦИОНАЛНАТА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07. 01. 2012 г.

XII клас

Зад.1
Нека M е средата на AB и H е ортогоналната проекция на D върху равнината ABC. От $AC=BC$ и $AD=BD$ следва, че $CM\perp AB$, $DM\perp AB$ и H лежи на правата CM **(2 точки).** Пресмятаме $CM=DM=\sqrt{17^2-8^2}=15$ и оттук $S_{ABC}=\dfrac{16.15}{2}=120$ **(2 точки).** В ΔCDM пресмятаме, че височината му от върха M е равна на $\sqrt{15^2-9^2}=12 \Rightarrow S_{CDM}=\dfrac{18.12}{2}=108$ **(1 точка)** и от $S_{CDM}=\dfrac{CM.DH}{2}$ $\Rightarrow$ $DH=\dfrac{72}{5}$ **(1 точка)**. За обемът на пирамидата намираме: $V=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.DH=576$ **(1 точка).**

Зад.2 **А)** - Преобразуване на неравенството до вида $(2^x-1).(25-5^x)>0$ **1точка**

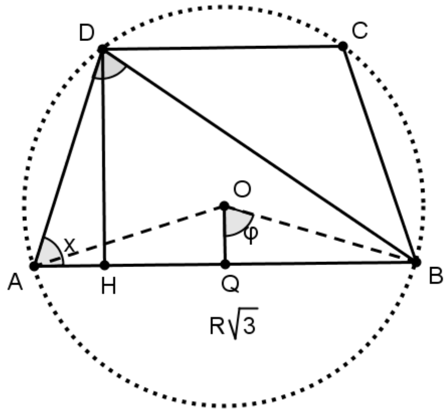
- Решаване на системите $\left|\begin{array}{l}2^x-1>0\\25-5^x>0\end{array}\right.$ и $\left|\begin{array}{l}2^x-1<0\\25-5^x<0\end{array}\right.$ **2точки**
- Намиране на решението на неравенството $x\in(0;\,2)$ и определяне на стойността на $n=1$ **1точка**

Б) - Заместена стойността на x с 1 и преобразувано уравнение до вида $2=\lg(2+\lg a).\lg_2 10$ **1точка**

- Решено уравнение за a и намерено $a=100$ **2точки**

Зад.3 а) Построяваме $OQ\perp AB$ и $DH\perp AB$.

За ΔOQB: $\sin\varphi=\dfrac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=60^0$ **(1 точка).** $\Rightarrow\measuredangle ADB=\varphi=60^{o}$ (вписан ъгъл с прилежаща дъга AB). От ΔABD по синусова теорема $\Rightarrow\dfrac{AB}{\sin 60^0}=\dfrac{BD}{\sin x}$ $\Rightarrow$ $BD=2R\sin x$.



Пресмятаме:
$\measuredangle BDH=60^{o}-(90^{o}-x)=x-30^{o}$ и от ΔBDH $\Rightarrow$ $\cos(x-30^0)=\dfrac{DH}{BD}$

$\Rightarrow DH=2R\sin x.\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ и $\sin(x-30^0)=\dfrac{BH}{BD}$

$\Rightarrow BH=2R\sin x.\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, но $BH=\dfrac{a+b}{2}$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\dfrac{a+b}{2}.DH=BH.DH=2R^2\sin^2 x.\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ **(2точки)**

Всяко друго вярно решение, различно от предложеното, се оценява с максимален брой точки.

За областен кръг се класират учениците получили най-малко 16 точки (за учениците без VII клас), а седмокласници – при получени над 73 точки).

б) Разглеждаме функцията $S(x)=\sin^2 x.\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ **(0,5 точка).**

$S^{'}(x)=2\sin x.\cos x.\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2 x.\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).2$ **(0,5 точка)**

$S^{'}(x)=0 \Leftrightarrow \cos x.\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin x.\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ $(\sin x\neq 0)$ $\Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$\Rightarrow$ $x=\frac{\pi}{9}$ и $x=\frac{4\pi}{9}$ **(1 точка)** $\Rightarrow S_{\max}(x)=S\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

При $x=\frac{4\pi}{9}$ бедрото $AD=2R\cos\frac{5\pi}{18}$ (може да се намери от ΔAHD) **(0,5 точка).**

За малката основа получаваме: $b=2BH-a=2R\cos\frac{5\pi}{18}$ **(0,5 точка)**, с което доказваме, че лицето на трапеца е максимално, когато бедрото е равно ма малката основа.

От $b=2R\cos\frac{5\pi}{18}$ **и** $45^0<\frac{5\pi}{18}<60^0$ $\Rightarrow$ $\cos 45^0>\cos\frac{5\pi}{18}>\cos 60^0$ $\Rightarrow$ $\frac{\sqrt{2}}{2}>\cos\frac{5\pi}{18}>\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$
$R\sqrt{2}>2R\cos\frac{5\pi}{18}>R$ $\Rightarrow b\in\left(R;\,R\sqrt{2}\right)$**(2 точки)**

Всяко друго вярно решение, различно от предложеното, се оценява с максимален брой точки.
За областен кръг се класират учениците получили най-малко 16 точки (за учениците без VII клас), а седмокласници – при получени над 73 точки).