Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – БУРГАС
Гр.Бургас – 8000 *тел.056/81 32 49, 81 32 61*
Ул.”Гладстон” 150 *факс:056/81 32 59*
rioburgas@gmail.com

61-ва НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 06.01.2012 г.
КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНКА

$S_{PQRS} = 100x - 2x^2 = 368, x^2 - 50x + 184 = 0$, намиране на $x_1 = 4 < 40, x_2 = 46 > 40$ и определяне, че $AP = 4$ см. **2 т.**

в) Изразяване (чрез отделяне на точен квадрат) на
$S_{PQRS} = 100x - 2x^2 = 2\left(2.25x - x^2\right) = 2.625 - 2\left(625 - 2.25x + x^2\right) = 1250 - 2\left(25 - x\right)^2 \le 1250$ **2 т.**
и определяне, че ако $AP = 25$ см, лицето S_{PQRS} е възможно най-голямо. **1 т.**

IX клас

Зад. 1

а) Получаване на уравнението $x^2 - 13x + 9 = 0$, определяне на $D = 133 > 0$ **1 т.**
Определяне на $A^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1.x_2}$ и прилагане на формулите на Виет $x_1 + x_2 = 13$ и $x_1.x_2 = 9$ **1 т.**
Намиране на $A^2 = 19$ и обосноваване на $A \ge 0$ и $A = \sqrt{19}$ **1 т.**

б) Прилагане формулите на Виет $x_1 + x_2 = 4k + 1$ и $x_1.x_2 = 2k + 3$ **1 т.**
Изразяване на $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = \left(4k+1\right)^2 - 2\left(2k+3\right) = 16k^2 + 4k - 5$ **1 т.**
Решаване на уравнението $16k^2 + 4k - 5 = 14k^2 + 9k - 2$ и намиране на $k_1 = 3$ и $k_2 = -0,5$ **1 т.**
Проверка на стойностите k_1 и k_2 в условието за съществуване на реални корени на кв. уравнение $D = 16k^2 - 11 \ge 0$ и определяне $k = 3$ **1 т.**

Задача 2

а) (2 точки) AB диаметър $\Rightarrow \sphericalangle APB = \sphericalangle AMB = 90^\circ \Rightarrow AM$ - височина и медиана в $\triangle ABC \Rightarrow AB = AC$. (1т.)

I начин: От $AP = BM \Rightarrow \triangle ABP \cong \triangle BAM$ (по катет и хипотенуза).

Следователно $\sphericalangle PAB = \sphericalangle MBA \Rightarrow AC = BC \Rightarrow \triangle ABC$ равностранен. (1 т.)

II начин: $AP = BM \Rightarrow \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{BM}$
$\Rightarrow \sphericalangle MAB = \sphericalangle PMA \Rightarrow AB \parallel MP$
$\Rightarrow P$ – среда на $AC \Rightarrow AB = BC$

Забележка: Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – БУРГАС
Гр.Бургас – 8000 *тел.056/81 32 49, 81 32 61*
Ул.”Гладстон” 150 *факс:056/81 32 59*
rioburgas@gmail.com

61-ва НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 06.01.2012 г.
КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНКА

б) (5 точки) Нека точка Q е среда на BH.

(1 т.) Тогава QN е средна отсечка

в $\triangle BHM \Rightarrow QN \parallel BM \Rightarrow QN \perp AM$.(1 т.)

QM е средна отсечка

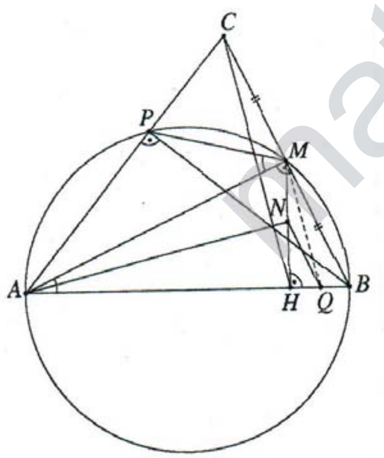
в $\triangle HBC \Rightarrow QM \parallel CH \ (1)$. (1 т.)

В $\triangle AQM$ $MN \perp AQ$, $QN \perp AM$.

Следователно N е ортоцентър и $AN \perp QM$.

(1 т.)

Оттук и от (1) получаваме $AN \perp CH$. (1 т.)



Забележка: Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ГР. БУРГАС
Гр. Бургас – 8000
тел. 813-249; 813-261 *ул. „Гладстон" № 150*
rioburgas@gmail.com *факс:813-259*

61-ва НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 06.01.2012 г.
КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНКА

Задача 3. (7 точки)

Да допуснем, че уравнението има решения в цели числа.

$147z^2$ и $\underbrace{77...7}_{2012}$ се делят на 7. Следователно x^2+2y^2 се дели на 7. (1 т.)

Ако x и y не се делят на 7, т.е. са от вида $7k\pm1; 7k\pm2; 7k\pm3$, то x^2 има остатък 1, 4 или 2 при деление на 7, а $2y^2$ - остатък 2, 1 или 4. Тогава x^2+2y^2 не се дели на 7. (2т.)

Следователно x и y се делят на 7. Заместваме в уравнението $x=7l$, $y=7n$ и получаваме $49l^2+98n^2+147z^2=\underbrace{77...7}_{2012}$

$$7l^2+14n^2+21z^2=\underbrace{11...1}_{2012}$$

(2 т.)

Числото 111111 се дели на 7, а $2012=6.335+2$. Следователно числото $\underbrace{11...1}_{2012}$ не се дели на 7 и уравнението няма решение в множеството на целите числа. (2 т.)

X клас

Зад. 1 а) Определяне, че $q^2=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$, изразяване от формулите на Виет $x_1+x_2=-1$ и $x_1.x_2=q$ и получаване на уравнение за q: $q^2+4q-1=0$ **1,5 т.**

Намиране на стойностите на q: $q_1=-2+\sqrt{5}$ и $q_2=-2-\sqrt{5}$ **1 т.**

и определяне, че от $q\geq0$ решение е само $q_1=-2+\sqrt{5}$ **0,5 т.**

б) Записване на системата във вида $\begin{vmatrix} xy+(x-y)=3 \\ xy(x-y)=2 \end{vmatrix}$ и полагане $\begin{vmatrix} xy=u \\ x-y=v \end{vmatrix}$ **1 т.**

Решаване на системата $\begin{vmatrix} u+v=3 \\ uv=2 \end{vmatrix}$ и намиране на $\begin{vmatrix} u=1 \\ v=2 \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} u=2 \\ v=1 \end{vmatrix}$ **1 т.**

Намиране на решенията за x и y: $\begin{vmatrix} x_1=1+\sqrt{2} \\ y_1=-1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_2=1-\sqrt{2} \\ y_2=-1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_3=2 \\ y_3=1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} x_4=-1 \\ y_4=-2 \end{vmatrix}$ **2 т.**

Забележка: Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.