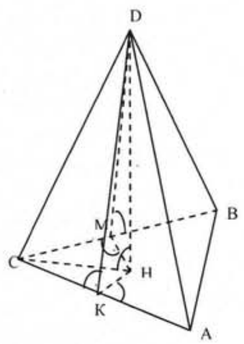
Утвърдил:
Началник на РИО-Благоевград:
/Ивайло Златанов/

XII КЛАС

1 зад. Нека H е ортогонална проекция на върха D върху равнината ABC. Построени са $HK \perp AC\left(K \in AC\right)$ *и* $HM \perp BC\left(M \in BC\right)$ **0,75 т.**



От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $DK \perp CA$ *и* $DM \perp BC$. **0,75 т.**

Тъй като $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD = 45°$ и CD е обща страна, правоъгълните триъгълници CKD и CMD са еднакви, откъдето CK = CM. **0,75 т.**

$\triangle CKH \cong \triangle CMH$, защото са правоъгълни и имат съответно равни по катет и хипотенуза **0,75 т.**

Получаваме $\measuredangle KCH = \measuredangle MCH$, откъдето CH е ъгл. на $\measuredangle ACB$. Тогава $\measuredangle KCH = \frac{1}{2}\measuredangle ACB = 30°$. **0,50 т.**

От $\triangle CKD, CK = CD\cos\measuredangle ACD = 4\cos 45° = 2\sqrt{2}$. **0,75 т.**

От $\triangle CKH, CH = \frac{CK}{\cos 30°} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$. – **0,75 т.**

Височината на пирамидата пресмятаме от $\triangle CHD$, $DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ **0,75 т.**

$$S_{ABC} = \frac{AC.BC.\sin\measuredangle ACB}{2} = \frac{6.5.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$ **0,75 т.**

Обемът на пирамидата е $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.DH = \frac{1}{3}.\frac{15\sqrt{3}}{2}.\frac{4\sqrt{3}}{3} = 10\,\text{cm}^2$. **0,50 т.**

2 зад.

а) $-1; 2$ **(1 т.)** **б)** $\frac{1}{3}$ **(1 т.)** **в)** $-\frac{3}{2}; 4$ **(1,5 т.)** **3,5 т.**

г) $x \in \left(0;1\right) \cup \left(1;3\right)$ **(1 т.)** **д)** $x \in \left[-1;0\right) \cup \left(0,6;1\right]$ **(1 т.)** **е)** $x \in \left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ **(1,5 т.)** **3,5 т.**

3 зад.

а) Нека *O* е центъра на окр. *k*, а *DP* и *CQ* са височини на трапеца.

От тр. *OBC* намираме $BC = 2\,OB\cos\alpha = 2\cos\alpha$; **1 т.**

$CQ = BC\sin\alpha = \sin 2\alpha$; $AP = BQ = BC\cos\alpha = 2\cos^2\alpha$; **1 т.**

$CD = AB - 2\,AP = 2 - 4\cos^2\alpha = -2\cos 2\alpha$; **0,5 т.**

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2}.CQ = 2\sin^2\alpha.\sin 2\alpha = 4\sin^3\alpha.\cos\alpha.$$ **1 т.**

б) Разглеждаме функцията $f(\alpha) = 4\sin^3\alpha.\cos\alpha$.

$f'(\alpha) = 12\sin^2\alpha.\cos^2\alpha - 4\sin^4\alpha = 4\sin^2\alpha.(3 - 4\sin^2\alpha)$. **1 т.**

$f'(\alpha) = 0$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\alpha = 60°$; **1 т.**

$f(\alpha)$ расте при $\alpha \in (45°; 60°)$ и $f(\alpha)$ намалява при $\alpha \in (60°; 90°)$. **1 т.**

Тогава лицето на трапеца е най-голямо при $\alpha = 60°$. **0,5 т.**

math-bg.com