LXI Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 18 декември 2011 година

<u>Критерии за оценяване</u>

<u>8. клас</u>

1. Даден е правоъгълен триъгълник *ABC*, за който точка *O* е средата на хипотенузата му *AB*, а $OM \parallel BC\ (M \in AC)$ и $MH \perp AB\ (H \in AB)$. Ако $BC = \sqrt{48}$ и $MH = \sqrt{3}$, намерете:

а) ъглите на триъгълника *AOM*; **3 точки**

б) отношението *HA* : *HO* : *HB*. **4 точки**

Намерено:

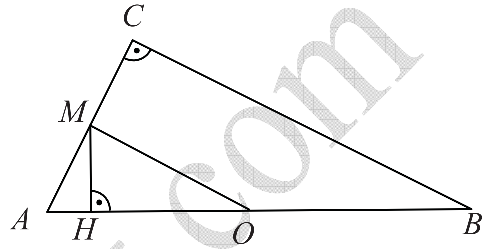
а) $OM = 2\sqrt{3}$ 1 т.

$\angle MOA = 30^\circ, \angle AMO = 90^\circ, \angle MAO = 60^\circ$ 2 т.

б) $AH = x \Rightarrow AM = 2x \Rightarrow AO = 4x$ 2 т.

$HO = 3x$, $HB = 7x$ 1 т.

$HA : HO : HB = 1 : 3 : 7$ 1 т.



2. а) Дадени са уравненията $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$, $(a \neq 0, c \neq 0)$. Докажете, че ако първото уравнение има реални корени, то и второто уравнение има реални корени, които са реципрочни на корените на първото.

3 точки

б) Решете уравнението $\left|87x^2 - 82x - a\right| + \left|87 - 82x - ax^2\right| = 0$ в зависимост от параметъра *a*. **4 точки**

а) Доказано:

Дискриминантите на двете уравнения са равни. Следователно ако първото уравнение има реални корени, то и второто уравнение има реални корени. 1 т.

Корените на първото уравнение са $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ и $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, а на второто са $x_3 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$ и $x_4 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$. 1 т.

$$x_1x_4 = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}\cdot\frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2c} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4ac} = 1 \text{ и}$$

$$x_2x_3 = \frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}\cdot\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2c} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4ac} = 1.$$ Следователно x_1 и x_4 са реципрочни, както и x_2 и x_3. 1 т.

б) Тъй като $\left|87x^2-82x-a\right|\geq 0$ и $\left|87-82x-ax^2\right|\geq 0$, то сборът им ще е равен на нула, ако едновременно и двата тричлена са равни на 0. Следователно търсим общ корен на уравненията $87x^2-82x-a=0$ и $-ax^2-82x+87=0$ 0,5 т.

От подточка а) следва, че ако x_1 и x_2 са корените на първото уравнение, а x_3 и x_4 са корените на второто уравнение, то уравненията ще имат общ корен ако $x_1=x_4=\pm 1$ ($x_2=x_3=\pm 1$) или $x_1=x_3$, откъдето следва, че $x_1=\frac{1}{x_2}$. 0,5 т.

1 сл. 1 е корен на двете уравнения. Тогава 87 – 82 – a = 0, т.е a = 5. В този случай двете уравнения нямат друг общ корен. 1 т.

2 сл. –1 е корен на двете уравнения. Тогава 87 + 82 – a = 0, т.е a = 169. И в този случай двете уравнения нямат друг общ корен. 1 т.

3 сл. x_1 и x_2 са реципрочни помежду си.

$$x_1x_2 = \frac{41+\sqrt{41^2+87a}}{87}\cdot\frac{41-\sqrt{41^2+87a}}{87} = \frac{41^2-\left(41^2+87a\right)}{87^2} = -\frac{a}{87} = 1 \Rightarrow a=-87.$$ Но при a = –87, дискриминантата е равна ва $D=41^2-87^2<0$, т.е. корените не са реални числа и a = –87 не е решение.

Следователно при a = 5 първоначалното уравнението има корен 1, при a = 169 има корен –1, а при всички останали стойности на параметъра няма решение. 1 т.

3. а) Пресметнете $a=\dfrac{25-\sqrt{3^6}}{\sqrt{\left(3\sqrt{3}+5\right)^2}}+\dfrac{25-\sqrt{(-3)^6}}{\sqrt{\left(5-3\sqrt{3}\right)^2}}$ **и намерете най-малкото цяло число *b*, за което** $\left(\sqrt{0,008}-0,2\sqrt{7\dfrac{1}{5}}\right).3b>a$ **.** **4 точки**

б) Докажете, че произведението на 4 последователни цели числа, увеличено с 1 е точен квадрат и пресметнете стойността на израза $\sqrt{2010.2011.2012.2013+1}-\sqrt{\left(2010^2-1\right)\left(2011^2-1\right)+1}$ **.** **3 точки**

а) Намерено:

$$a=\frac{25-3^3}{\left|3\sqrt{3}+5\right|}+\frac{25-3^3}{\left|5-3\sqrt{3}\right|}=-\frac{2}{3\sqrt{3}+5}-\frac{2}{3\sqrt{3}-5}=-6\sqrt{3}$$ 1 т.

$$\sqrt{0,008}-0,2\sqrt{7\frac{1}{5}}=0,2\sqrt{0,2}-1,2\sqrt{0,2}=-\sqrt{0,2}$$ 1 т.

$$-3\sqrt{0,2}b>-6\sqrt{3}\Rightarrow b<2\sqrt{15}$$ 1 т.

Следователно няма такава стойност за *b*. 1 т.

б) Доказано, че:

$$(n-1)n(n+1)(n+2)+1=n^4+2n^3-n^2-2n+1=n^4+2n^3+n^2-2n^2-2n+1=$$

$$\left(n^2+n\right)^2-2\left(n^2+n\right)+1=\left(n^2+n-1\right)^2$$ 1 т.

$$\sqrt{2010.2011.2012.2013+1}=2011^2+2011-1$$

$$\sqrt{\left(2010^2-1\right)\left(2011^2-1\right)+1}=\sqrt{2009.2010.2011.2012+1}=2010^2+2010-1$$ 1,5 т.

$$\sqrt{2010.2011.2012.2013+1}-\sqrt{\left(2010^2-1\right)\left(2011^2-1\right)+1}=2011^2-2010^2+2011-2010$$

$$=(2011+2010)(2011-2010)+1=4022$$ 0,5 т.