LXI Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 18 декември 2011 година

<u>Критерии за оценяване</u>

<u>7. клас</u>

по 3 т.

задача	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
отговор	**Б**	**Г**	**А**	**В**	**Г**	**Б**	**Б**	**Г**	**А**	**В**	**А**	**В**	**Г**	**Г**	**В**

16.

(А) = (4)	**(Б) = (6)**	**(В) = (2)**	**(Г) = (1)**

За всеки верен отогвор – по 1 т. **общо 4 т.**

задача	17.		18.		19.	20.	21.		22.	
	а)	б)	а)	б)			а)	б)	а)	б)
отговор	**24°**	**72°**	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	**75°**	$\frac{2}{7}$	**2**	**–2 и 4**	**4:5:1**	**720 лв.**
точки за верен отговор	**2**	**2**	**2**	**2**	**4**	**4**	**2**	**3**	**3**	**3**

23. Дадени са уравненията $\left(\frac{3+y}{2}-1\right)^2=\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+1$ **и** $3-3|2y-3|=5$**. Решете уравненията и проверете дали те са еквивалентни.** **12 точки**

а) Получено:

$$\left(\frac{3+y}{2}-1\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}y+\frac{y^2}{4} \text{ или } =\frac{1+2y+y^2}{4}$$ **3 т.**

$$\left(\frac{y}{2}-1\right)^2=\frac{y^2}{4}-y+1$$ **2 т.**

Уравнението е еквивалентно на $1+2y=-4y+8$ **2 т.**

Първото уравнение има единствен корен, равен на $\frac{7}{6}$. **1 т.**

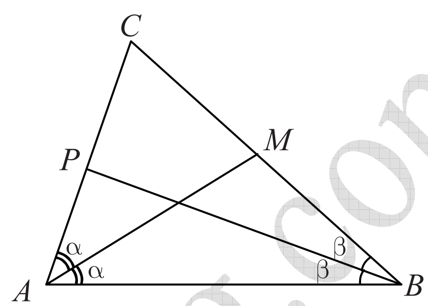
Второто уравнение е еквивалентно на $|2y-3|=-\frac{2}{3}$ **2 т.**

То няма решение, тъй като модулът не може да е равен на отрицателно число.

1 т.

Следователно двете уравнения не са еквивалентни. **1 т.**

24. Ъглополовящите AM и BP в триъгълника ABC $(M\in BC,\ P\in AC)$ сключват съответно със страните BC и AC ъгли, равни на 75°. Намерете ъглите на триъгълника ABC. (Разгледайте всички възможни случаи.) **12 точки**



Означаваме $\measuredangle BAM=\measuredangle MAC=\alpha$ и $\measuredangle ABP=\measuredangle PBC=\beta$. **1 т.**

1 сл. $\measuredangle AMC=\measuredangle BPC=75^\circ$.

Два от ъглите на $\triangle BPC$ са равни на два от ъглите на $\triangle AMC$ ($\measuredangle AMC=\measuredangle BPC=75^\circ$ и $\measuredangle ACM=\measuredangle BCP=\measuredangle ACB$).

Следователно и третите им ъгли са равни $\Rightarrow \measuredangle MAC=\measuredangle PBC$, т.е. $\alpha=\beta$. **2 т.**

От $\measuredangle AMC$ външен за триъгълника AMB следва, че $\alpha + 2\alpha = 75^\circ$, т.е. $\alpha = 25^\circ$. **1 т.**

Тогава $\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=50^\circ$ и $\measuredangle ACB=80^\circ$. **1 т.**

2 сл. $\measuredangle AMB=\measuredangle BPA=75^\circ$.

Аналогично се доказва, че $\alpha=\beta$.

$\alpha + 2\alpha = 105^\circ$, т.е. $\alpha = 35^\circ$.

Тогава $\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=70^\circ$ и $\measuredangle ACB=40^\circ$. **2 т.**

3 сл. $\measuredangle AMC=\measuredangle BPA=75^\circ$.

От $\measuredangle AMC$ външен за триъгълника AMB следва, че $\alpha + 2\beta = 75^\circ$, а от триъгълника APB следва, че $2\alpha + \beta = 105^\circ$. **2 т.**

Като съберем почленно двете равенства получаваме, че $3\alpha + 3\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ$.

1 т.

Тогава $\measuredangle ACB=180^\circ-2(\alpha+\beta)=60^\circ$. **1 т.**

От $\alpha + 2\beta = 75^\circ \Rightarrow \beta = 75^\circ - (\alpha + \beta) = 15^\circ$, а $\alpha = 45^\circ$. Следователно $\measuredangle BAC=90^\circ$ и $\measuredangle ABC=30^\circ$. **1 т.**

math-bg.com