

LXI Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 18 декември 2011 година

Критерии за оценяване

6. клас

1. Намерете числата a , b и c , ако $a = (12.1,7 - 12.0,7) \cdot \left| \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot 2 \right|$, $b = (-5)^6 \cdot 15^{-6} \cdot 18^3$ и $-0,1 - c = -2,03 : (-0,7)$. Ако числата a , b и c се изобразяват върху числовата ос съответно с точките A , B и C , намерете образ на кои числа може да е точка M , за която $MC = AB$. 7 точки

Намерено:

$$a = (12.1,7 - 12.0,7) \cdot \left| \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot 2 \right| = 12 \cdot \left| -\frac{1}{6} \right| = 2 \quad 2 \text{ т.}$$

$$b = (-5)^6 \cdot 15^{-6} \cdot 18^3 = 5^6 \cdot \frac{1}{3^6 \cdot 5^6} \cdot 3^6 \cdot 2^3 = 8 \quad 1 \text{ т.}$$

$$-0,1 - c = 2,9 \Rightarrow c = -0,1 - 2,9 = -3 \quad 2 \text{ т.}$$

$AB = 6$ м.ед. Следователно точка M може да е образ на числата $-3 + 6 = 3$ или $-3 - 6 = -9$. 2 т.

2. Два автомобила Опел и Фиат се движат по асфалтов път със скорост 80 км/ч. Фиатът се движи на дистанция 240 м преди Опела.

а) Ако Фиатът спре за почивка, колко минути след това Опелът ще го настигне? 1 точки

б) Ако в даден момент Опелът започне да се движи с 10 % по-голяма скорост, колко минути след това той ще настигне Фиата, който продължава да се движи с непроменена скорост? 2 точки

в) На едно кръстовище и двата автомобила завиват по павиран път и намаляват скоростта си на 50 км/ч. На каква дистанция един от друг ще се движат те по павирания път? 4 точки

Намерено:

а) $0,24 : 80 = 0,003 \text{ ч} = 0,18 \text{ мин}$ 1 т.

б) $0,1 \cdot 80 = 8 \text{ км/ч}$ ще е разликата между скоростите на Опела и Фиата 1 т.

$0,24 : 8 = 0,03 \text{ ч} = 1,8 \text{ мин}$ е времето, за което Опелът ще настигне Фиата 1 т.

в) Намерено:

Когато Фиатът тръгне по павирания път и намали скоростта си на 50 км/ч, Опелът ще се движи още 240 м със скорост 80 км/ч. 1 т.

Опелът ще измине 240 м за 0,18 мин. = 0,003ч 1 т.

За 0,18 мин Фиатът ще измине $0,003 \cdot 50 = 0,150$ км = 150 м 1 т.

След това и Опелът ще намали скоростта си на 50 км/ч и дистанцията между двамата няма да се променя и ще остане 150 м. 1 т.

3. За числата a , b и c е изпълнено, че $a^2 = b^2 \cdot (b - c)$. Едното от числата е положително, другото е отрицателно, а третото е равно на нула.

а) Определете кое от числата е равно на нула, кое е положително и кое е отрицателно. (Обосновете отговора си.) 4 точки

б) Намерете числата, различни от нула, ако абсолютната стойност на отрицателното число е 5 пъти по-голяма от положителното число. 3 точки

а) Обосновано:

Ако $a = 0 \Rightarrow b^2 \cdot (b - c) = 0 \Rightarrow b = 0$ (противоречие с условието – не може две от числата да са 0) или $b = c$ (противоречие с условието – не може да има две равни числа). Следователно a не е 0. 1 т.

Ако $b = 0 \Rightarrow a = 0$ – противоречие с условието – не може две числа да са 0. Следователно и b не е 0. Тогава $c = 0$. 1 т.

При $c = 0$, получаваме, че $a^2 = b^3$. 1 т.

Тъй като $a^2 > 0 \Rightarrow b^3 > 0 \Rightarrow b > 0$. Тогава $a < 0$. 1 т.

б) Намерено:

$|a| = 5b \Rightarrow a^2 = 5^2 b^2$ 1 т.

От $a^2 = b^3 \Rightarrow 5^2 b^2 = b^3 \Rightarrow b = 5^2 = 25$ 1 т.

Тогава $|a| = 125 \Rightarrow a = -125$ 1 т.