LXI Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 18 декември 2011 година

<u>Критерии за оценяване</u>

<u>11. клас</u>

1. В стая, в която температурата на въздуха била 0°C, включили радиатор и температурата започнала постепенно да се повишава. След един час термометърът показвал 5°C, а в края на третия час температурата в стаята била 10°C. Ако с t_n е означен ръстът на температурата през *n*-тия час от включването на радиатора, за всяко $n \geq 2$ е в сила, че $\dfrac{t_n}{t_{n-1}} = q$, където *q* е положително реално число.

а) Намерете *q*. **3 точки**

б) Докажете, че през петия час температурата в стаята се е покачила с по-малко от 1 градус и в края на петия час термометърът е показвал по-малко от 12°C.

4 точки

Намерено:

а) $t_1 = 5$ и $t_1 + t_2 + t_3 = 10$. 1 т.

Но $t_2 = t_1 q = 5q$, $t_3 = t_1 q^2 = 5q^2$ 1 т.

$\Rightarrow 5 + 5q + 5q^2 = 10$. От уравнението $\Rightarrow q^2 + q - 1 = 0$ намираме $q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

1 т.

б) $t_5 = t_1 q^4 = 5\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4 = \dfrac{5}{16}\left(6-2\sqrt{5}\right)^2 = \dfrac{5}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)^2 = \dfrac{5}{4}\left(14-6\sqrt{5}\right) = \dfrac{5}{2}\left(7-3\sqrt{5}\right)$.

1 т.

$\dfrac{5}{2}\left(7-3\sqrt{5}\right) < 1 \Leftrightarrow 7-3\sqrt{5} < \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow 3\sqrt{5} > \dfrac{33}{5} \Leftrightarrow 5\sqrt{5} > 11 \Leftrightarrow 125 > 121$, което е вярно неравенство. 1 т.

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 5\left(1 + \underbrace{q + q^2}_{1} + q^3 + q^4\right)$$

$$= 5\left(1 + 1 + q^2\left(\underbrace{q + q^2}_{1}\right)\right) = 5\left(1+1+1-q\right) = 5\left(3 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(7-\sqrt{5}\right)$$

$\frac{5}{2}\left(7-\sqrt{5}\right)<12 \Leftrightarrow 11<5\sqrt{5} \Leftrightarrow 121<125$ 2 т.

2. Дадена е аритметичната прогресия $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

а) Ако $a_3 = 13$ и $a_6 = 4$, намерете за кое *n* сборът $a_1 + a_2 + ... + a_n$ е най-малък.
3 точки

б) Разликата на прогресията е равна на 1. Намерете стойностите на a_1, ако за всяко *n* е изпълнено, че $S_{2012} \le S_n$. **4 точки**

а) Съставена системата $\begin{vmatrix} a_1 + 2d = 13 \\ a_1 + 5d = 4 \end{vmatrix}$ и намерено $a_1 = 19, d = -3$ 1 т.

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}n = \frac{38n - 3(n-1)n}{2} = \frac{-3n^2 + 41n}{2} = -\frac{3}{2}n^2 + \frac{41}{2}n$$

1 т.

Извод, че няма най-малка стойност. 1 т.

б) $S_{2012} \le S_n \Leftrightarrow \frac{2a_1 + 2011}{2} \cdot 2012 \le \frac{2a_1 + n - 1}{2} \cdot n \Leftrightarrow (2a_1 + 2011)2012 \le (2a_1 + n - 1)n$.

Следователно търсим стойностите на a_1, за които неравенството $n^2 + (2a_1 - 1)n - (2a_1 + 2011)2012 \ge 0$ е изпълнено за всяко естествено число *n*.

1 т.

Корените на уравнението са $n_1 = -2a_1 - 2011$ и $n_2 = 2012$.

Ако $-2a_1 - 2011 < 2012$, т.е. $a_1 > -2011{,}5$, решенията на неравенството са $n \in (-\infty; -2a_1 - 2011] \cup [2012; +\infty)$. Всяко естествено число *n* е решение на неравенството, ако $-2a_1 - 2011 \ge 2011 \Rightarrow a_1 \le -2011$, т.е. $a_1 \in (-2011{,}5; -2011]$.

1,5 т.

Ако $-2a_1 - 2011 \ge 2012$, т.е. $a_1 \le -2011{,}5$, решенията на неравенството са $n \in (-\infty; 2012] \cup [-2a_1 - 2011; +\infty)$. За да бъде всяко естествено число решение на неравенството, трябва $-2a_1 - 2011 \le 2013 \Rightarrow a_1 \ge -2012$, т.е. $a_1 \in [-2012; -2011{,}5]$.

Окончателно $a_1 \in [-2012; -2011]$. 1,5 т.

3. Лицето на триъгълника *ABC* е равно на $\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)$, където *BC = a*, *AC = b*.

а) Намерете ъглите на триъгълника. **3 точки**

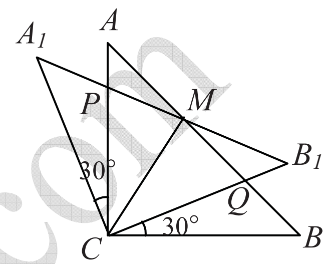
б) При ротация с център *C* и ъгъл 30° отсечката *AB* се изобразява в A_1B_1. Ако $AB=\sqrt{2}$, докажете, че лицето на общата част на триъгълниците *ABC* и A_1B_1C е равно на $2-\sqrt{3}$. **4 точки**

а) Нека $\measuredangle ACB=\gamma$. Тогава $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma \Rightarrow \frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ 1 т.

От $\sin\gamma\le 1 \Rightarrow \frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)\le\frac{1}{2}ab \Rightarrow (a-b)^2\le 0 \Rightarrow a=b$ и $\sin\gamma=1$

$\Rightarrow \gamma=90^\circ$, $\alpha=\beta=90^\circ$. 2 т.

б) Нека $A_1B_1\cap AC=P,\ CB_1\cap AB=Q$.



Последователно се доказва, че:

$\triangle ACA_1\cong\triangle BCB_1 \Rightarrow AA_1=BB_1$;

$\triangle AMA_1\cong\triangle B_1MB \Rightarrow AM=MB_1$;

$\triangle AMC\cong\triangle B_1MC \Rightarrow \measuredangle ACM\cong\measuredangle B_1CM=30^\circ$. 1 т.

От $AB=\sqrt{2}\Rightarrow AC=BC=1$.

В $\triangle PCM \Rightarrow \measuredangle CPM=\measuredangle CMP=75^\circ \Rightarrow CP=CM$

1 т.

От $\triangle ACM \Rightarrow \dfrac{CM}{\sin 45^\circ}=\dfrac{AC}{\sin 105^\circ}\Rightarrow CM=\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}$

1 т.

$S_{PCQM}=2S_{PCM}=CM^2\sin 30^\circ=$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 45^\circ}{\sin^2 105^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\cos 210^\circ}=\frac{1}{2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$ 1 т.