LXI Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 18 декември 2011 година

<u>Критерии за оценяване</u>

<u>10. клас</u>

1. **Намерете най-малкото цяло число *x*, за което:**

   а) **стойността на израза** $(x-4)^2(3x-7)(x^2-15)$ **е неотрицателна;**

   3 точки

   б) **е изпълнена системата** $\left|\begin{array}{l}(x-4)^2(3x-7)(x^2-15)\le 0\\ \dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-9x+18}-\dfrac{x+3}{x-6}\ge 0\end{array}\right.$. **4 точки**

Намерено:

а) Корените 4, $\dfrac{7}{3}$ и $\pm\sqrt{15}$ на уравнението $(x-4)^2(3x-7)(x^2-15)=0$ и подредени на числовата ос. 1 т.

Решенията на неравенството $(x-4)^2(3x-7)(x^2-15)\ge 0$ са

$x\in\left[-\sqrt{15};\dfrac{7}{3}\right]\cup\left[\sqrt{15};+\infty\right)$ 1,5 т.

Най-малкото цяло решение на неравенството е -3. 0,5 т.

б) Решения на първото неравенство са $x\in\left(-\infty;-\sqrt{15}\right]\cup\left[\dfrac{7}{3};\sqrt{15}\right]\cup 4$. 1 т.

При $x\ne 3$ и $x\ne 6$ второто неравенство е еквивалентно на

$(x^2-x+2)(x-3)(x-6)\le 0$ и е изпълнено за $x\in(3;6)$. 2 т.

Решения на системата са $x\in\left(3;\sqrt{15}\right)\cup 4$. 0,5 т.

Най-малкото цяло решение (и единствено) на неравенството е 4. 0,5 т.

2. а) Ако $x \in [-3;3]$, намерете най-голямата и най-малката стойности на всяка от функциите $y=(x+1)(x-4)$, $y=|x+1|(x-4)$ и $y=(x+1)|x-4|$;

4 точки

б) Намерете стойностите на параметрите *a* и *b*, за които уравнението $|x+1|(x-4)=a$ има единствен реален корен в интервала $[-3;3]$, а уравнението $(x+1)|x-4|=b$ има два реални корена в същия интервал. **3 точки**

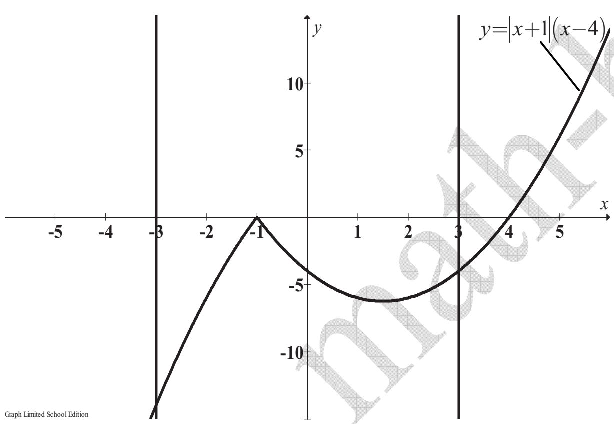
а) Намерено:

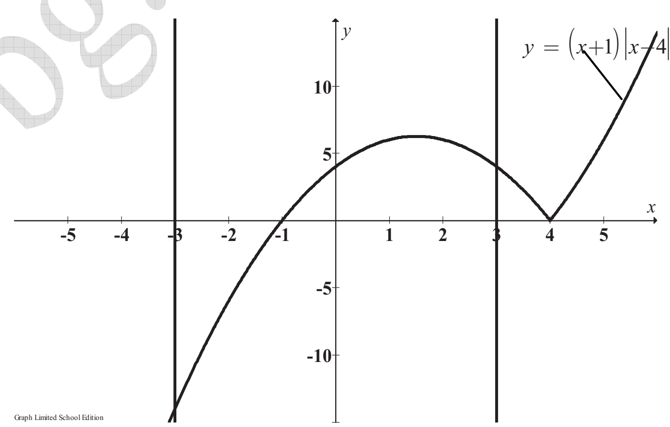
$\max\limits_{x\in[-3;3]}(x+1)(x-4)=14$ и $\min\limits_{x\in[-3;3]}(x+1)(x-4)=-6,25$ 1 т.

$\max\limits_{x\in[-3;3]}|x+1|(x-4)=0$ и $\min\limits_{x\in[-3;3]}|x+1|(x-4)=-14$ 1,5 т.

$\max\limits_{x\in[-3;3]}(x+1)|x-4|=6,25$ и $\min\limits_{x\in[-3;3]}(x+1)|x-4|=-14$ 1,5 т.

б) Начертани графиките на функциите $y=|x+1|(x-4)$ и $y=(x+1)|x-4|$ 1 т.





Намерени стойностите на параметъра *a*, за които уравнението $|x+1|(x-4)=a$ има единствен реален корен в интервала $[-3;3]$, а именно $a=0$ и $a\in[-14;-6,25)$.

1 т.

Намерени стойностите на параметъра *b*, за които уравнението $(x+1)|x-4|=b$ има два реални корена в интервала $[-3;3]$, а именно $b\in[4;6,25)$. 1 т.

3. Разглеждаме всички квадратни функции $y=x^2+px+q$, за които $p-q=2012$.

а) Докажете, че графиката на всяка от тях има по две пресечни точки с абсцисната ос; 2 точки

б) Докажете, че графиките на всички функции имат обща точка М и намерете координатите й; 2 точки

в) Намерете най-малкото лице, което може да има триъгълник с върхове точка М и двете пресечни точки на графиката на някоя от разглежданите функции с абсцисната ос. 3 точки

Доказано:

а) $D=p^2-4q=p^2-4(p-2012)=p^2-4p+8048=(p-2)^2+8044>0$ за всяко p. Следователно уравнението $x^2+px+q=0$ има два реални корена x_1 и x_2 и графиката пресича абсцисната ос в точките A(x_1; 0) и B(x_2; 0). 2 т.

б) Нека $y=x^2+p_1x+p_1-2012$ и $y=x^2+p_2x+p_2-2012$ са графиките на две от разглежданите фунции. Тяхната пресечна точка е с координати (-1; -2011). Обратно точката M с тези координати лежи на графиката на всяка от функциите, защото $-2011=(-1)^2-p+p-2012$. 2 т.

в) $S_{ABM}=\dfrac{|x_1-x_2|.|-2011|}{2}=1005,5|x_1-x_2|$ 1 т.

$S_{ABM}=1005,5\sqrt{p^2-4p+8048}$ 1 т.

$S_{ABM}=1005,5\sqrt{(p-2)^2+8044}\geq 1005,5\sqrt{8044}=2011\sqrt{2011}$ - най-малкото лице, което може да има такъв триъгълник. 1 т.