LXI Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 18 декември 2011 година

8. клас

1. Даден е правоъгълен триъгълник ABC, за който точка O е средата на хипотенузата му AB, а $OM \parallel BC$ $(M \in AC)$ и $MH \perp AB$ $(H \in AB)$. Ако $BC = \sqrt{48}$ и $MH = \sqrt{3}$, намерете:

а) ъглите на триъгълника AOM; **3 точки**

б) отношението $HA : HO : HB$. **4 точки**

2. а) Дадени са уравненията $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$, $(a \neq 0, c \neq 0)$. Докажете, че ако първото уравнение има реални корени, то и второто уравнение има реални корени, които са реципрочни на корените на първото. **3 точки**

б) Решете уравнението $\left|87x^2 - 82x - a\right| + \left|87 - 82x - ax^2\right| = 0$ в зависимост от стойностите на параметъра a. **4 точки**

3. а) Пресметнете $a = \dfrac{25 - \sqrt{3^6}}{\sqrt{\left(3\sqrt{3}+5\right)^2}} + \dfrac{25 - \sqrt{\left(-3\right)^6}}{\sqrt{\left(5-3\sqrt{3}\right)^2}}$ и намерете най-малкото цяло число b, за което $\left(\sqrt{0,008} - 0,2\sqrt{7\frac{1}{5}}\right).3b > a$. **4 точки**

б) Докажете, че произведението на 4 последователни цели числа, увеличено с 1 е точен квадрат и пресметнете стойността на израза $\sqrt{2010.2011.2012.2013+1} - \sqrt{\left(2010^2-1\right)\left(2011^2-1\right)+1}$. **3 точки**