

LXI Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 18 декември 2011 година

12. клас

1. Дадено е уравнението $2^x(2^x - a)x - 2^x(a - 2^x) = (a - 3)(x + 1)$,

където a е параметър.

а) Решете уравнението при $a = 3$. **2 точки**

б) Намерете стойностите на параметъра a , за които уравнението има точно две отрицателни решения. **5 точки**

2. Окръжността k е вписана в правоъгълния триъгълник ABC ($\angle C = 90^\circ$), а окръжността k_1 с радиус, равен на $3\sqrt{2} - 4$, се допира външно до k и до катетите на триъгълника.

а) Намерете радиуса на окръжността k . **3 точки**

б) Ако $\angle BAC = 15^\circ$, докажете, че $AB = 4(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. **4 точки**

3. Ръбът AD на триъгълната пирамида $ABCD$ е перпендикулярен на основата ABC .

а) Докажете, че ортоцентърът на триъгълника ABC се проектира върху равнината (BCD) в ортоцентъра на триъгълника BCD . **4 точки**

б) Намерете обема на пирамидата, ако $AB = BC = AC = \sqrt{6}$, а ръбът AD сключва с равнината (BCD) ъгъл, чийто косинус е равен на $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3 точки