

LXI Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 18 декември 2011 година

11. клас

1. В стая, в която температурата на въздуха била 0°C , включили радиатор и температурата започнала постепенно да се повишава. След един час термометърът показвал 5°C , а в края на третия час температурата в стаята била 10°C . Ако с t_n е означен ръстът на температурата през n -тия час от включването на радиатора, за всяко $n \geq 2$ е в сила, че $\frac{t_n}{t_{n-1}} = q$, където q е положително реално число.

а) Намерете q . **3 точки**

б) Докажете, че през петия час температурата в стаята се е покачила с по-малко от 1 градус и в края на петия час термометърът е показвал по-малко от 12°C . **4 точки**

2. Дадена е аритметичната прогресия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

а) Ако $a_3 = 13$ и $a_6 = 4$, намерете за кое n сборът $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ е най-малък. **3 точки**

б) Разликата на прогресията е равна на 1. Намерете стойностите на a_1 , ако за всяко n е изпълнено, че $S_{2012} \leq S_n$. **4 точки**

3. Лицето на триъгълника ABC е равно на $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, където $BC = a, AC = b$.

а) Намерете ъглите на триъгълника. **3 точки**

б) При ротация с център C и ъгъл 30° отсечката AB се изобразява в A_1B_1 . Ако $AB = \sqrt{2}$, докажете, че лицето на общата част на триъгълниците ABC и A_1B_1C е равно на $2 - \sqrt{3}$. **4 точки**