Отговори на темата за X клас

1	Г	11	Б
2	В	12	В
3	А	13	В
4	Б	14	$\sqrt{2}\,cm$
5	Б	15	$k \in (-\infty;-2] \cup (0;3)$
6	Г	16	Б
7	В	17	Г
8	$x \in (-3;-2) \cup (2;3)$	18	Б
9	$(0;0)$, $(-1;3)$, $(1;2)$	19	А
10	2	20	$m=-1,\ m=\dfrac{2}{7}$

Задача

Да се намерят всички естествени числа *n*, за които 3^n+n^2 е точен квадрат на цяло число.

Решение:

Нека

$3^n+n^2=m^2$

$3^n=(m-n)(m+n) \Rightarrow m-n=3^k$, $m+n=3^{n-k}$

$m+n>m-n \Rightarrow n-k>k \quad \Rightarrow 0 \le k<\dfrac{n}{2}$.

Нека $k=0$. Тогава $m-n=1, m+n=3^n$, откъдето $n=\dfrac{3^n-1}{2}$.

$n=1$ е решение. При $n>1$ по индукция се доказва, че $3^n>1+2n$.

Нека $k=1$. Тогава $m-n=3$, $m+n=3^{n-1}$, откъдето $n=\dfrac{3\left(3^{n-2}-1\right)}{2}$.

$n=3$ е решение. При $n>3$ от $3^{n-2}>1+2(n-2)$ получаваме, че

$n=\dfrac{3\left(3^{n-2}-1\right)}{2}>\dfrac{3}{2}2(n-2)=3n-6$ т.е. $n<3$, което е противоречие.

Нека $k \ge 2$. Тогава получаваме $n=\dfrac{3^k\left(3^{n-2k}-1\right)}{2}$ т.е. $n=3^k.s$, където $s \ge 1$.

От $3^{n-2k}>1+2(n-2k)$ имаме $n=3^k.s>3^k(n-2k)$, откъдето $s>n-2k=3^k.s-2k$ или $\left(3^k-1\right)s<2k$.

Но $3^k-1>2k$, $s \ge 1$, което е в противоречие с полученото неравенство.
Следователно решения на задачата са само числата $n=1$ и $n=3$.