МИННО-ГЕОЛОЖКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВЕТИ ИВАН РИЛСКИ” – СОФИЯ

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

14. 07. 2011 год.

ВАРИАНТ 2

Задача 1. Дадена е системата:

$$\begin{cases} 3x+2y=b \\ x+y=1. \end{cases}$$

1.1. Решете системата при $b=2$.

Решение: $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$,

следователно $x=0,\ y=1.$ отг. $(0,\ 1)$

1.2. При какви стойности на $b\in(-\infty;\infty)$ за решението (x_0, y_0) е изпълнено условието $x_0=y_0$?

Решение: $\begin{cases} 3x+2y=b \\ x+y=1. \end{cases}$

Следователно $x_0=b-2,\ y_0=3-b.$ За решението (x_0, y_0) е изпълнено условието $x_0=y_0$, когато $b-2=3-b$, т.е. при $b=\frac{5}{2}$.

Задача 2. Решете уравнението

$$\log_3(x-1)+\log_3(2x-1)=1.$$

Решение: Определяме дефиниционното множество от системата: $\begin{cases} x-1>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Rightarrow x>1$.

За $x\in(1,\infty)$ преобразуваме: $\log_3(x-1)(2x-1)=1\Rightarrow(x-1)(2x-1)=3$.

Решаваме квадратното уравнение $2x^2-3x-2=0$ при условието $x>1$ и намираме решението на изходното уравнение: $x=2$ (другият корен на квадратното уравнение не принадлежи на дефиниционното множество, тъй като е равен на $-\frac{1}{2}$).

Задача 3. Дадена е функцията $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

3.1. Намерете дефиниционното й множество;

Решение: Търсеното дефиниционно множество е $(-\infty;\infty)$.

3.2. Намерете границата $\lim\limits_{x\to\infty} x.g(x)$;

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty} x.g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1$.

3.3. Намерете локалните екстремуми на функцията $g(x)$;

Решение: Намираме производната на дадената функция:

$g'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Определяме знака на производната: $g'(x)>0\Leftrightarrow x^2<1$.

math-bg.com

Тогава $g(x)$ е строго растяща в интервала $(-1, 1)$ и строго намаляваща в интервалите $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$. В частност функцията $g(x)$ има локален минимум при $x = -1$, който е $g(-1) = -\frac{1}{2}$ и локален максимум при $x = 1$, който е $g(1) = \frac{1}{2}$.

3.4. Под какъв ъгъл е наклонена спрямо оста *Ox* допирателната, прекарана през началото на координатната система към кривата $y = \frac{x}{x^2 + 1}$?

Решение: Намираме $y'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow y'(0) = 1$. Следователно ъгълът между *Ox* и допирателната, прекарана през началото на координатната система, има тангенс 1, откъдето получаваме, че този ъгъл е равен на 45^0.

Задача 4. Даден е ромб *ABCD* с остър ъгъл при върха *A*, диагонал *AC* = 8 см и $\sin \angle ADC = \frac{24}{25}$. Да се намери дължината на страната на ромба

Решение: От косинусовата теорема за търсената дължина a на страната на ромба получаваме:

$a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(\angle ADC) = 8^2$;

$2a^2(1 - \cos(\angle ADC)) = 8^2$.

От друга страна $\angle ADC$ е тъп и има $\cos(\angle ADC) = -\sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = -\sqrt{\frac{1}{25} \cdot \frac{49}{25}} = -\frac{7}{25}$,

откъдето получаваме: $2a^2 \cdot \frac{32}{25} = 64 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ см.

math-bg.com