МИННО-ГЕОЛОЖКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВЕТИ ИВАН РИЛСКИ” – СОФИЯ

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

10. 04. 2011 год.

ВАРИАНТ 2

Задача 1.

1.1 Решете уравнението: $2^{2\sqrt{x}} - 3.2^{\sqrt{x}} + 2 = 0$.

РЕШЕНИЕ: $x \geq 0$

$$\left(2^{\sqrt{x}}\right)^2 - 3.2^{\sqrt{x}} + 2 = 0$$

$$2^{\sqrt{x}} = u > 0$$

$$u^2 - 3u + 2 = 0 \Rightarrow u_1 = 1, u_2 = 2$$

$$2^{\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$2^{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x_2 = 0$$

1.2 Решете уравнението: $\lg(x+2) + \lg(x+3) = \lg 12$.

РЕШЕНИЕ: $\left| \begin{array}{l} x+2>0 \\ x+3>0 \end{array} \right. \Rightarrow x > -2$

$$\lg[(x+2)(x+3)] = \lg 12$$

$$x^2 + 2x + 3x + 6 = 12$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4.6}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -6 \notin D$$

$$x = 1$$

Задача 2. При какви стойности на реалния параметър n уравнението

$$x^2 + (n+11)x + n + 9 = 0$$

има реални корени с различни знаци ?

РЕШЕНИЕ: Тук $a = 1,\ b = n + 11,\ c = n + 9$.

При $n < -9$ $\quad x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{n+9}{1} < 0$ и x_1 и x_2 са с различни знаци. Те са реални, защото $D = b^2 - 4ac > 0$, тъй като $ac < 0$.

Може да се установи, че дискриминантата е положителна, като се докаже неравенството

$$D=(n+11)^2-4(n+9)>0 .$$

Наистина, последното неравенство следва от неравенството $-(n+9)>0$.

Задача 3. Дадена е функцията

$$y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+12x,\quad x\in(-\infty;\infty).$$

3.1 Да се намерят координатите на точките, в които допирателните към графиката на функцията $y=f(x)$ са успоредни на абсцисната ос.

РЕШЕНИЕ:

$$f'(x)=0\Rightarrow f'(x)=x^2-8x+12=0$$

$$x_1=6,\quad x_2=2$$

$$y_1=f(6)=0,\quad y_2=f(2)=\frac{32}{3};$$

$$M_1(6,0),\quad M_2\left(2,\frac{32}{3}\right).$$

3.2 Да се намерят ъгловите коефициенти на допирателните към графиката на функцията $y=f(x)$ в пресечните й точки с абсцисната и ординатната ос.

РЕШЕНИЕ: $y=0\rightarrow\left(\frac{x^3}{3}-4x^2+12x=0\right)$

$$x\left(x^2-12x+36\right)=0$$

$$x_1=0,\quad x_{2,3}=6$$

$$k_1=f'(0)=0^2-8.0+12=12,$$

$$k_2=f'(6)=6^2-8.6+12=0.$$

Точката $O(0,0)$ е пресечна точка на графиката на функцията и с абсцисната и с ординатната ос едновременно.

3.3 Да се намери границата $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3}$.

РЕШЕНИЕ: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{x^3}{3}-4x^2+12x}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

Задача 4. Около окръжност е описан равнобедрен трапец с дължини на основите 16 cm и 9 cm. Намерете дължината на радиуса на окръжността.

РЕШЕНИЕ: Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ с основи $AB = 16\,cm$ и $CD = 9\,cm$. Прекарваме височината CC_1, перпендикулярна на AB и CD. Полученият триъгълник CC_1B е правоъгълен с прав ъгъл при върха C_1. По Питагоровата теорема имаме

$BC^2 = CC_1^2 + BC_1^2 \Rightarrow CC_1 = \sqrt{BC^2 - BC_1^2}$. Но $AD = BC = \dfrac{16+9}{2} = 12{,}5\,cm$ и

$BC_1 = \dfrac{16-9}{2} = 3{,}5\,cm$. Следователно, $CC_1 = \sqrt{12{,}5^2 - 3{,}5^2} = 12\,cm$. Тъй като CC_1 е равно на диаметъра на вписаната в трапеца окръжност, то за нейния радиус получаваме $r = 6\,cm$.