<u>РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 7 и 8 клас</u>

1. Отг. D). $1+2011>2011=1.2011=2011^1>1=1^{2011}>\frac{1}{2011}$.

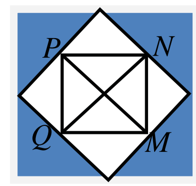
2. Отг. A). 5 кубчета×6 стени = 30 стени и 3 пирамиди × 4 стени = 12 стени или общо $30+12=42$ стени.

3. Отг. B). Щом белите ивици са 8 и пътеката започва и завършва с бяла ивица, то черните ивици са 7. Следователно ивиците са общо $8+7=15$ и тъй като всяка от тях е с широчина 50 $cm=0,5\,m$, дължината на пътеката е $15.0,5=7,5\,m$.

4. Отг. A). $(12:3)-(4:2)=4-2=2$.

5. Отг. C). Първото възможно показание с цифрите 0, 1, 1 и 2 е $21:01$. От момента, в който часовникът престава да показва $20:11$, до появата на $21:01$ изминават точно 50 минути.

6. Отг. C). Да означим малкия квадрат с $MNPQ$. Страните и диагоналите на $MNPQ$ разделят средния квадрат на 8 равнобедрени правоъгълни триъгълника, които са еднакви. Оттук следва, че лицето на средния по големина квадрат е два пъти по-голямо от лицето на малкия квадрат, т. е. то е равно на $12\,cm^2$. Аналогично лицето на големия квадрат е два пъти по-голямо от лицето на средния, откъдето следва че лицето на големия квадрат е 24 cm^2. Следователно търсената разлика е $24-12=12\text{ cm}^2$.



7. Отг. E). Щом последната къща от страната на четните номера е № 12, то на улицата от страната на четните номера има общо $12:2=6$ къщи. Следователно броят на къщите с нечетни номера е $17-6=11$. Единадесетият поред нечетен номер е 21. Заключаваме, че последната къща от страната на нечетните номера е № 21.

8. Отг. A). Ако допуснем, че през третия ден Котаракът Филип е уловил 6 риби (половината от всичките) или повече от 6, то за първите два дни той щеше да е уловил 6 риби или по-малко от 6. Това противоречи на условието, че през третия ден той е уловил по-малко риби отколкото през първите два дни. Ако допуснем, че през третия ден Котаракът Филип е уловил 4 риби или по-малко от 4, то от една страна през всеки от първите два дни той щеше да е уловил по-малко от 4 риби или общо за двата дни – по-малко от 8. От друга страна, след като всички риби са 12, през първите два дни уловените риби щяха да са 8 или повече. Отново се получава противоречие. Остава единствената възможност през третия ден Котаракът Филип да е уловил 5 риби. Сега с аналогични разсъждения установяваме, че през първия ден Котаракът Филип е уловил 3 риби, а през втория ден – съответно 4 риби.

9. Отг. B). Най-голямото трицифрено число със сума на цифрите 8 е 800, а най-малкото трицифрено число със сума на цифрите е 8 е 107. Търсената сума е $800+107=907$.

10. Отг. E). Да означим числото в централната клетка на таблицата с x. Като използваме условието за сумата на числата във всеки квадрат 2×2, изразяваме останалите четири липсващи числа чрез x. Сумата на петте липсващи числа е равна на $20-3x$ и това число дава остатък 2 при деление на 3 за всяко x. Нито едно от посочените числа не дава такъв остатък.

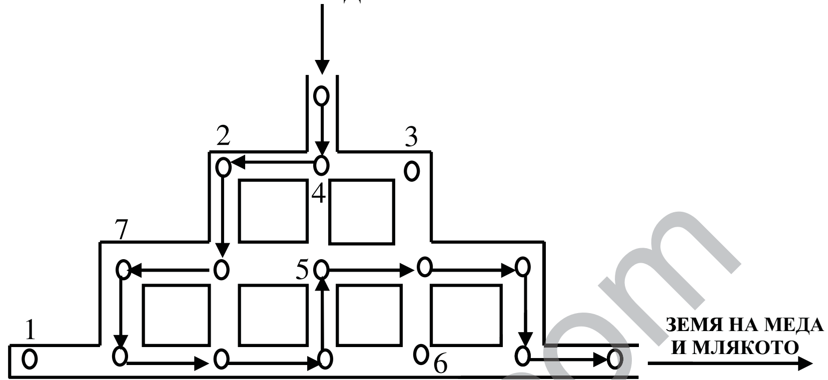
$7-x$	2	$5-x$
1	x	3
$5-x$	4	$3-x$

11. Отг. C). Умножаваме числителя и знаменателя с 1000:

$$\frac{2011.2,011}{201,1.20,11}=\frac{2011.2,011.1000}{201,1.10.20,11.100}=\frac{2011.2011}{2011.2011}=1.$$

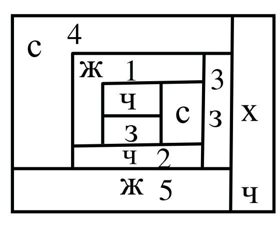
12. Отг. C). $1+2+3+4+5+6+7+8+9=(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5=4.10+5=45$. От друга страна $(17+13)+(7+5)=42$ и следователно $45-42=3\,г$.

13. Отг. B).



При показания маршрут остават 3 несъбрани семки от всичките 16. Несъбрани са крайната долна лява (№ 1), крайната горна дясна (№ 3), както и една междинна (№ 6) от най-долния ред (както е в примера) или една междинна (№ 5) от междинния ред, ако Хамстерът Сивко се беше изкачил към междинния ред от една семка по-нататък (от № 6). Съществуват и други маршрути със събиране на 13 семки, например без събиране на крайната горна лява (№ 2) и крайната горна дясна (№ 3). Ясно е, че семка № 1 изобщо не може да бъде събрана съгласно правилата от условието на задачата. Възможните маршрути могат да се разделят на две групи. В първата група влизат онези, при които семките с номера 2 и 3 не се събират, а във втората – онези, в които само една от семките с номера 2 и 3 се събира (ясно е, че не съществува маршрут, при който е възможно събирането едновременно на семките с номера 2 и 3). В първата група влиза един единствен маршрут: от № 4 към № 5, след това задължително наляво до № 7, слизане на долния ред, движение надясно до № 6, качване на междиния ред, движение надясно, после надолу и веднага надясно към изхода. При втората група съществуват две възможности за движение нататък от семката с № 4: наляво към № 2 или надясно към № 3. По-горе бяха описани маршрутите с преминаване през № 2. Маршрутът през № 3 е аналогичен. Във всичките случаи поне 3 от семките остават несъбрани.

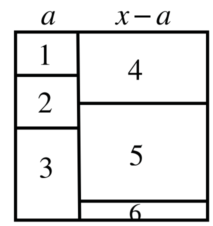
14. Отг. A). Най-напред трябва да се оцвети клетката с № 1. От условието на задачата следва, че нейният цвят е определен еднозначно – жълт. След това е клетката с № 2. Нейният цвят е също еднозначно определен – червен. Следва оцветяване на клетките с № 3 – зелен, с № 4 – син и с № 5 – жълт. За клетката "х" остава да бъде червена.



15. Отг. E). Средното аритметично на дадените числа е:

$$\frac{17+13+5+10+14+9+12+16}{8}=\frac{96}{8}=12.$$

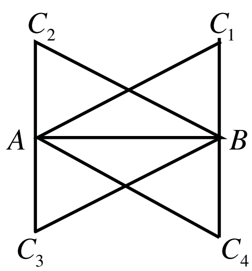
Сумата на дадените осем числа е равна на 8.12, т.е. на произведението на броя на числата и тяхното средно аритметично. Сумата на шест от тези осем числа трябва да е равна на произведението 6.12, след като искаме средното им аритметично да остане същото. Следователно сумата на двете числа, които трябва да се отстранят, е равна на $8.12-6.12=2.12=24$. От дадените числа само двойката 10 и 14 има сума 24.



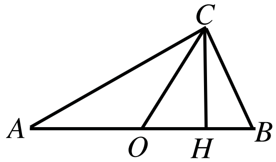
16. Отг. D). В сумата от периметрите на шестте части вертикалната страна на квадрата се повтаря 4 пъти, докато хоризонталната се повтаря 6 пъти. Следователно страната на квадрата се повтаря общо 10 пъти, откъдето заключаваме, че дължината й е $120:10=12\,cm$. Тогава лицето на квадрата е $12.12=144\,cm^2$.

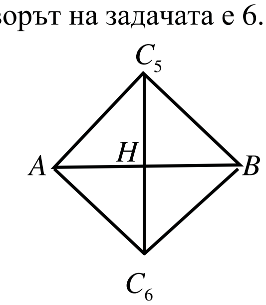
Задачата може да се реши и аналитично. Нека дължината на страната на квадрата е $x\,cm$. Означаваме шестте части с числата от 1 до 6, както е показано. Ако a е дължината в сантиметри на всяка от хоризонталните страни на правоъгълниците 1, 2 и 3, то дължината в сантиметри на всяка от хоризонталните страни на правоъгълниците 4, 5 и 6 е $x-a$. Сумата от периметрите на правоъгълниците 1, 2 и 3 е равна на $2x+3.2a=2x+6a$. Сумата от периметрите на правоъгълниците 4, 5 и 6 е равна на $2x+3.2\left(x-a\right)=2x+6x-6a=8x-6a$. Оттук $120=2x+6a+8x-6a=10x$ и следователно $x=120:10=12\,cm$. Лицето на квадрата е $12.12=144\,cm^2$.

17. Отг. B). Ясно е, че единственият гол, получен от "Барселона" в собствената врата, е в загубената среща (няма как да загубиш един мач, ако не получиш гол). Тогава единствената възможност за резултата в загубената среща е $0:1$. В равния мач не са отбелязани голове, защото в противен случай броят на получените голове от "Барселона" в собствената врата би бил повече от 1. Следователно резултатът от равния мач е $0:0$. За резултата от спечелената среща остава единствената възможност да е $3:0$.



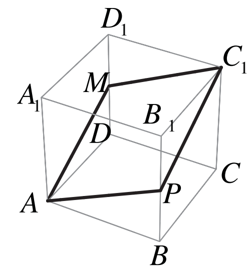
18. Отг. C). Съществуват две възможности за отсечката AB – да е катет или хипотенуза. Ако е катет, то другият катет трябва да е с дължина $1cm$, за да бъде лицето на триъгълника равно на $1cm^2$. Възможните разположения на точката C са четири. На чертежа те са означени с C_1, C_2, C_3 и C_4. Имаме $BC_1=AC_2=AC_3=BC_4=1\,cm$ и $S_{ABC_1}=S_{BAC_2}=S_{BAC_3}=S_{ABC_4}=1\,cm^2$. Ще разгледаме случая, когато AB е хипотенуза. Нека точката C е такава, че ΔABC е неравнобедрен правоъгълен ($\angle ACB=90^0$) и CH ($H\in AB$) е височината към хипотенузата. Ако O е средата на AB, то CO е медиана и следователно $CO=\dfrac{1}{2}AB=1\,cm$. Тъй като ΔABC е неравнобедрен, то $H\neq O$ и от правоъгълния ΔOHC следва, че $CH<CO=1\,cm$. Заключаваме, че $S_{ABC}<1\ \ cm^2$. Следователно единствената възможност да бъде изпълнено условието на задачата е ΔABC да е равнобедрен правоъгълен. Сега е ясно, че възможните разположения на точката C са две: C_5 и C_6 (вж. чертежа), като $C_5H=C_6H=1\,cm$. Окончателно, отговорът на задачата е 6.

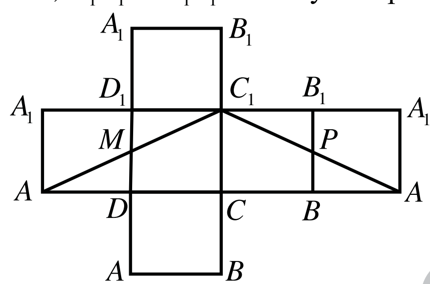




19. Отг. B). Най-голям е сборът $a+b$, защото $a+b>b>a.b>a:b$.

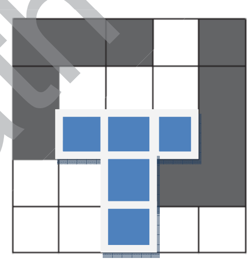
20. Отг. A). Да означим куба с $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а с M и P точките, които заедно с A и C_1 задават върховете на четириъгълника, разделящ повърхнината на куба на две равни части. Като се отчете, че точката M е обща за съседните стени DCC_1D_1 и ADD_1A_1, а точката P е обща за съседните стени ABB_1A_1 и BCC_1B_1, след разрязване на куба по страните AA_1, AB, A_1B_1, AD, A_1D_1 и B_1C_1 се получава развивката от отговор **A).**



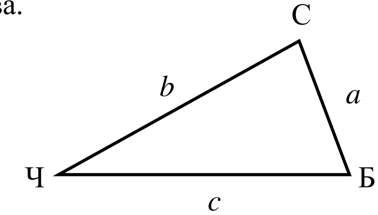


21. Отг. E). Числото трябва да завършва на 0 или 5, за да се дели на 5. Следователно числото завършва на 80 или на 85. От признака за делимост на 4 следва, че числото завършва на 80 (80 се дели на 4, докато 85 не се дели на 4). Следователно $Y=0$. Според признака за делимост на 9 трябва сборът от цифрите на даденото число да се дели на 9. Тъй като $X+Y+2+4+8=X+14$, то числото $X+14$ трябва да се дели на 9. Първото възможно число след 14, което се дели на 9, е 18, откъдето $X=4$. Следващите числа, които се делят на 9, са 27, 36 и т. н., които не дават решения, защото при тях $X\geq 13$, а X е цифра и $X\leq 9$. Така получаваме, че $X+Y=4$.

22. Отг. D).



23. Отг. B). Можем да считаме, че в общия случай гнездата на трите врабчета са върхове на триъгълник. Да означим този триъгълник с ЧБС (Ч е гнездото на Черко, Б е гнездото на Белко, а С е гнездото на Сивко). В частност триъгълникът може да е изроден, т.е. трите гнезда да лежат на една права.



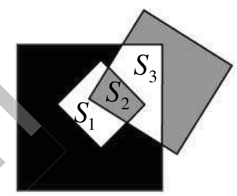
Да означим дължините на страните на триъгълника с a, b и c, както е показано. Тези дължини отговарят на съответните разстояния между гнездата. От твърдението на Сивко следва неравенството $b>2a$, от твърдението на Черко следва неравенството $c>2b$, а от твърдението на Белко – съответно неравенството $c>2a$.

<u>*Случай* 1</u>. Сивко и Черко казват истината, а Белко лъже. Тогава $a < 0,5b$ и с помощта на неравенството на триъгълника заключаваме, че $c \le a + b < 1,5b$. Освен това $c > 2b$ и следователно $2b < c < 1,5b$ ($b > 0$), което е невъзможно.

<u>*Случай* 2</u>. Черко и Белко казват истината, а Сивко лъже. Тогава $b < 0,5c$ и $a < 0,5c$. С помощта на неравенството на триъгълника заключаваме, че $c \le a + b < 0,5c + 0,5c = c$, т.е. $c < c$, което също е невъзможно.

<u>*Случай* 3</u>. Сивко и Белко казват истината, а Черко лъже. Тогава $a < 0,5b$ и с помощта на неравенството на триъгълника заключаваме, че $c \le a + b < 1,5b$, т.е. $c < 1,5b$, което не е в противоречие с отрицанието на твърдението на Черко, т.е. с $c \le 2b$. Заключаваме, че единствено възможен е случай 3.

24. Отг. D). Да означим лицата на двете бели части с S_1 и S_3, а лицето на по-малката сива част – с S_2. Лицето $S_ч$ на черната част е разлика от лицето на квадрата със страна 7 и сбора на лицата S_1, S_2 и S_3. Но $S_1 = 9 - S_2$ и тогава:



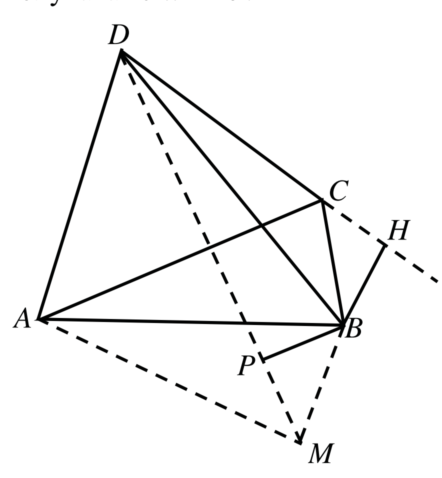
$$S_ч = 49 - (S_1 + S_2 + S_3) = 49 - (9 - S_2 + S_2 + S_3) = 40 - S_3.$$

За лицето S_C на сивата част имаме $S_C = S_2 + (25 - S_2 - S_3) = 25 - S_3$. Следователно:

$$S_ч - S_C = (40 - S_3) - (25 - S_3) = 15 \ cm^2.$$

25. Отг. D). Нека x е броят на произведените от Митко изстрели и a е броят на попаденията му в осмицата. От условието следва, че броят на попаденията в десятката е също a. Успешните изстрели са 75% от x, т.е. те са $\frac{3}{4}x$. В частност заключаваме, че числото x се дели на 4. Броят на точките от попаденията в осмицата е $8a$, а броят на точките от попаденията в десятката е $10a$. Тъй като попаденията в петицата са $\frac{3}{4}x - 2a$, то броят на точките, получени от тези попадения, е $5\left(\frac{3}{4}x - 2a\right)$. Следователно $5\left(\frac{3}{4}x - 2a\right) + 18a = 99$, откъдето $5\left(\frac{3}{4}x - 2a\right) = 9(11 - 2a)$. Заключаваме, че числото $11 - 2a$ трябва да се дели на 5. От друга страна $11 - 2a > 0$, което е изпълнено само ако $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$ или $a = 5$. Единствено при $a = 3$ числото $11 - 2a$ се дели на 5. Така получаваме $x = 20$.

26. Отг. B). <u>*Първи начин*</u>. В равнобедрения ΔABC ($AB = AC$) по условие имаме $\angle ABC = 75°$, откъдето следва, че и $\angle ACB = 75°$, а $\angle BAC = 30°$. Тогава $\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = 80° - 30° = 50°$. От ΔACD имаме $\angle ACD = 180° - (65° + 50°) = 65°$, откъдето $AC = AD$. Заключаваме, че $\angle ADB = 50°$ и следоваетлно $\angle BDC = 65° - 50° = 15°$.



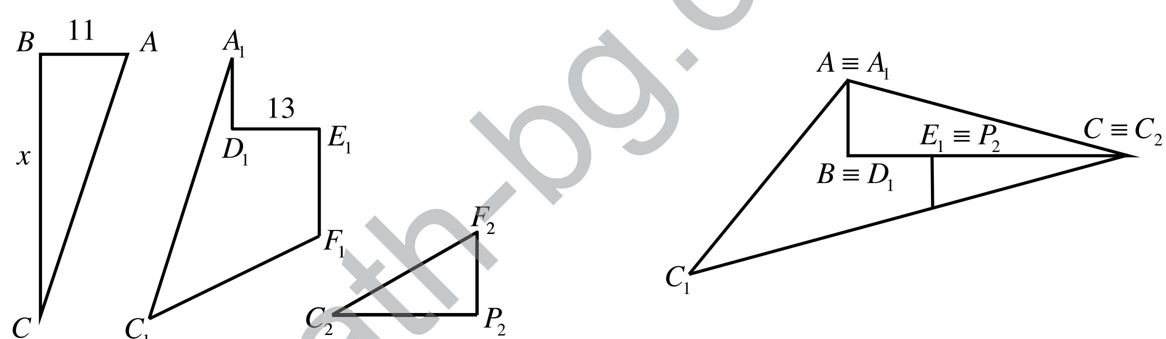
<u>*Втори начин*</u> (за осмокласници). От равенствата $AB = AC = AD$ следва, че точките B, C и D лежат на окръжност с център A и радиус AB. Тъй като $\angle BAC = 30°$ е централен ъгъл, то

$\widehat{BC} = 30°$ и за вписания $\angle BDC$ намираме $\angle BDC = \frac{1}{2}\widehat{BC} = \frac{1}{2}.30° = 15°$.

27. Отг. А). От условието следва, че догодина годините на Еми ще се делят на 7 и 8, а значи и на 56, откъдето следва, че сега Еми е на 55 години. Аалогично, миналата година годините на Стефан са се деляли на 7 и 8, а значи и на 56, откъдето следва, че сега Стефан е на 57 години. Окончателно заключаваме, че Стефан е с 2 години по-възрастен от Еми.

28. Отг. В). След съкращения получаваме $\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E} = \frac{K \cdot N \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{M \cdot E}$. Тъй като $K \cdot N \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O \geq 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 120$ и $M \cdot E \leq 9 \cdot 8 = 72$, то $\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E} \geq 2$. От друга страна, при $K = 2,\ N = 3,\ A = 4,\ R = 6,\ O = 1,\ M = 8,\ E = 9$ (и например $G = 7$) стойността на израза $\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}$ е точно 2.

29. Отг. В). Трите части след разрязването са означени съответно с ABC, $A_1C_1F_1E_1D_1$ и $C_2P_2F_2$, като е показан начинът на тяхното свързване в триъгълник. От чертежа се вижда, че $A(A_1)B(D_1) = 11$, $B(D_1)E_1(P_2) = 13$, $E_1(P_2)C(C_2) = 11 + 13 = 24$ и следователно $x = B(D_1)C(C_2) = 13 + 24 = 37$.



30. Отг. D). Нека $(x; y)$ е решение на даденото уравнение. Ако $x \leq y$, то $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ и следователно $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$, т.е. $\frac{1}{3} \leq \frac{2}{x}$, откъдето $x \leq 6$. От друга страна $\frac{1}{y} > 0$ и получаваме, че $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$, т.е. $x > 3$. Като даваме на x последователно стойности 4, 5 и 6, намираме решенията $(4;12)$ и $(6;6)$. Тъй като x и y участват симетрично в уравнението, заключаваме, че и $(12;4)$ е решение. Така намираме, че общият брой решения е 3.