

## Зимни математически състезания

Варна, 3 – 5 март 2011 г.

### Тема за 9. клас

Задача 9.1. Да се реши системата

$$\begin{cases} xy + 2yz = 5 \\ yz + 2zx = 3 \\ zx + 2xy = 7 \end{cases} .$$

Задача 9.2. Даден е успоредник  $ABCD$ , в който  $AB = 4AD$  и  $\sphericalangle BCD = 60^\circ$ . Точките  $E$  и  $F$  са средите съответно на страните  $AB$  и  $CD$  и точка  $P$  е симетрична на  $F$  относно правата  $AB$ . Да се докаже, че:

- $PA = PC$ ;
- $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CEB = 30^\circ$ .

Задача 9.3. В израза  $A = 1 * 2 * 3 * \dots * n$  всяка от звездичките е заменена със знак за събиране или умножение и в резултат е получено съставно число, чийто най-малък прост делител е означен с  $p$ . Нека  $p_n$  е най-голямото просто число  $p$ , което може да се получи по този начин.

- Да се намери  $p_7$ .
- Да се докаже, че  $p_8 = 61$ .

Задача 9.4. Нека  $n$  е естествено число. Естествените числа от 1 до  $n^2$  са разположени в клетките на таблица  $n \times n$  по такъв начин, че всеки две последователни числа са разположени в две клетки, които имат обща страна. Да се докаже, че не е възможно сумите на числата във всеки ред и всеки стълб да са равни помежду си.

Задачите са предложени от: 9.1., 9.3. – Петър Бойваленков, 9.2., 9.4. – Николай Белухов