Кратки решения на задачите

Задача 9.1. Да се реши системата $\begin{vmatrix} xy + 2yz & = 5 \\ yz + 2zx & = 3 \\ zx + 2xy & = 7 \end{vmatrix}$.

Решение. Събираме почленно трите уравнения на системата и получаваме $xy+yz+zx = 5$. Оттук и от първото уравнение намираме $zx - yz = 0$, т.е. $z = 0$ или $x = y$. Първата възможност отпада поради второто уравнение, а при $x = y$ системата добива вида $\begin{vmatrix} x^2 + 2xz & = 5 \\ xz & = 1 \end{vmatrix}$ (третото уравнение е следствие от първите две). Следователно $x = \pm\sqrt{3} = y$ и $z = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, т.е. решенията са $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

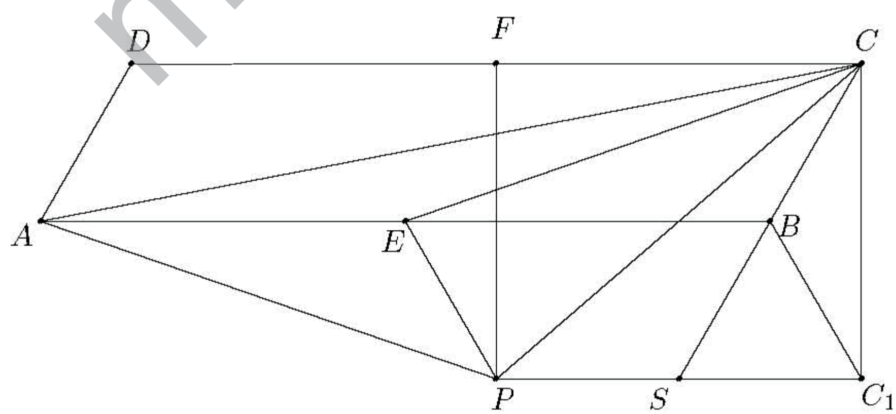
Задача 9.2. Даден е успоредник $ABCD$, в който $AB = 4AD$ и $\sphericalangle BCD = 60^\circ$. Точките E и F са средите съответно на страните AB и CD и точка P е симетрична на F относно правата AB. Да се докаже, че:

а) $PA = PC$;

б) $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CEB = 30^\circ$.

Решение. а) Да означим с C_1 точката, симетрична на C относно правата AB и с S – средата на PC_1. Тогава лесно се вижда, че $\triangle BC_1S$ е равностранен, точките C, B и S лежат на една права и $SC = 2BC$.

Сега за $\triangle PSC$ и $\triangle PEA$ имаме $PE = C_1B = BC = PS$, $EA = 2AD = 2BC = SC$ и $\sphericalangle PEA = 120^\circ = \sphericalangle PSC$. Оттук $\triangle PSC \cong \triangle PEA$ и $PA = PC$.



б) От а) следва, че $\sphericalangle APC = 120^\circ$, защото ъгълът между PA и PC е равен на ъгъла между PE и PS. Накрая

$$\sphericalangle CAB + \sphericalangle CEB = \sphericalangle CAB + \sphericalangle C_1EB = \sphericalangle CAB + \sphericalangle PAB = \sphericalangle CAP = 30^\circ.$$

Задача 9.3. В израза $A = 1 * 2 * 3 * \dots * n$ всяка от звездичките е заменена със знак за събиране или умножение и в резултат е получено съставно число, чийто най-малък прост делител е означен с p. Нека p_n е най-голямото просто число p, което може да се получи по този начин.

а) Да се намери p_7.

б) Да се докаже, че $p_8 = 61$.

Решение. Да отбележим, че, тъй като $a + b < ab$ при различни $a, b > 1$, най-голямото число, което може да се получи по описания начин, не надминава $1 + n!$. Оттук следва, че $p_n \leq \sqrt{1 + n!}$.

а) Тъй като $1 + 7! = 5041 = 71^2$, т.е. $p_7 \leq 71$, и 71 е просто число, получаваме $p_7 = 71$.

б) Имаме $1 + 8! = 40321 = 61.661$, откъдето следва, че $p_8 \geq 61$. Ще докажем, че няма как да получим по-големи стойности за p_8. За целта ще подобрим горната оценка за минималния прост делител на по-малките от числата A, а за най-големите ще извършим директна проверка.

Подредени по големина в низходящ ред, числата, които се получават по описания начин (прости или съставни), са: $a_1 = 1 + 8!$, $a_2 = 8!$, $a_3 = 1 + 2 + 3.4.\cdots.8 = 3 + \frac{8!}{2}$, $a_4 = 1.2 + 3.4.\cdots.8 = 2 + \frac{8!}{2}$, $a_5 = 1 + 2.3 + 4.\cdots.8 = 7 + \frac{8!}{6}$, $a_6 = 1.2.3 + 4.\cdots.8 = a_7 = 1 + 2 + 3 + 4.\cdots.8 = 6 + \frac{8!}{6}$, $a_8 = 1.2 + 3 + 4.\cdots.8 = 5 + \frac{8!}{6}$, $a_9 = 1 + 2.3.\cdots.7 + 8 = 9 + \frac{8!}{8}$, $a_{10} = 7! + 8 = 8 + \frac{8!}{8}$, $a_{11} = 1 + 2 + 3.4.\cdots.7 + 8 = 11 + \frac{7!}{2} = 11 + \frac{8!}{16}$ и т.н. Тъй като $\sqrt{a_{11}} = \sqrt{2531} < 51$ (всъщност 2531 е просто число), числото p_8 не може да се получи от a_{11} или от по-малко от него число. Остава да видим, че a_2, a_4, $a_6 = a_7$ и a_{10} са четни (т.е. най-малкият им прост делител е 2), a_3 и a_9 се делят на 3, a_5 се дели на 7 и a_8 се дели на 5 (т.е. най-малките им прости делители са съответно 3, 7 и 5).

Задача 9.4. Нека n е естествено число. Естествените числа от 1 до n^2 са разположени в клетките на таблица $n \times n$ по такъв начин, че всеки две последователни числа са разположени в две клетки, които имат обща страна. Да се докаже, че не е възможно сумите на числата във всеки ред и всеки стълб да са равни помежду си.

Решение. Да разгледаме „рамката“, съставена от тези $4n-4$ клетки, които имат обща страна с границата на таблицата. Да подредим числата в тези клетки по големина: $a_1 < a_2 < \dots < a_{4n-4}$. Ще докажем с индукция по k, че за всяко $k \leq 4n - 4$ клетките, съдържащи числата $a_1, a_2, \dots, a_k$, образуват един непрекъснат сегмент от съседни клетки по дължината на рамката.

При $k = 1$ твърдението е очевидно вярно. Да допуснем, че то е вярно за $k = m$ и да разгледаме положението на клетката, съдържаща числото a_{m+1}. Тя няма да образува един непрекъснат сегмент с клетките $a_1, a_2, \dots, a_m$ тогава и само тогава, когато съществуват две квадратчета A и B от рамката, които се намират „между“ a_{m+1} и двата края на сегмента, образуван от $a_1, a_2, \dots, a_m$. Да нарисуваме начупената линия, свързваща центровете на клетките с последователни числа, водеща от a_m до a_{m+1}. Ясно е, че тази линия разделя шахматната дъска на две части, едната от които съдържа клетката A, а другата – клетката B. Но при това няма никакъв начин, щом продължим номерацията от a_{m+1} нататък в едната от тези две части, да стигнем след това до което и да е поле от другата – за целта би трябвало да номерираме два пъти някое от полетата по дължината на разделителната линия! Достигнахме до противоречие и с това твърдението е доказано.

Да разгледаме сегмента, образуван от клетките, съдържащи числата $a_1, \ldots, a_{2n-2}$ (тоест, първата половина). Лесно се вижда, че този сегмент трябва да „покрива" една от крайните линии (ред или стълб) изцяло, и да не съдържа нито една клетка от противоположната крайна линия. Но тогава всяко число в непокритата линия ще бъде строго по-голямо от всяко число в покритата такава и сумите в тези две линии няма как да бъдат равни!

Забележка. Не е трудно да се види, че при нечетно n сумите в съседни редове (стълбове) са с различна четност.