

Решения и примерно точкуване

Задача 8.1. Да се решат уравненията:

а) $(x^2 + 3x + 2)^2 = 3x(x^2 + 3x + 2)$;

б) $(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 2x^2$.

Решение: а) $(x^2 + 3x + 2)^2 = 3x(x^2 + 3x + 2) \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)^2 - 3x(x^2 + 3x + 2) = 0$

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 2) = 0. \quad (1 \text{ т.})$$

Оттук получаваме $x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2$ и $x^2 + 2 = 0$ няма решения. (1 т.)

б) $(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 2x^2 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2 - 2x)(x^2 + 3x + 2 - x) = 2x^2 \Leftrightarrow (2 \text{ т.})$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)^2 - 3x(x^2 + 3x + 2) + 2x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2. \quad (2 \text{ т.})$$

Задача 8.2. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) точката $H \in AB$ е петата на височината през върха D , точката E е средата на диагонала BD и $HE \parallel AC$. Ако лицето на триъгълника DBH е S , да се намери лицето на $ABCD$.

Решение: Построяваме $EF \parallel AB$, $F \in AC$. (1 т.) Тогава

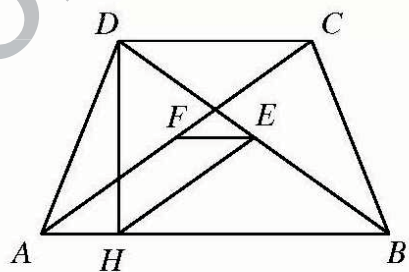
$AHEF$ е успоредник и $AF = HE$. (1 т.) Тъй като HE е медиана в правоъгълния $\triangle DHB$, то $HE = \frac{1}{2}BD$. Но

$$AF = \frac{1}{2}AC \quad (1 \text{ т.}), \text{ откъдето получаваме } AC = BD.$$

Следователно $ABCD$ е равнобедрен трапец. (1 т.)

$$\text{Имаме } HB = AB - AH = AB - \frac{AB - CD}{2} = \frac{AB + CD}{2} \text{ и}$$

$$S_{ABCD} = DH \cdot HB. \quad (1 \text{ т.}) \text{ Но } S_{DBH} = S = \frac{1}{2}DH \cdot HB, \text{ откъдето } S_{ABCD} = 2S. \quad (1 \text{ т.})$$



Задача 8.3. Нека a , b и c са дължините на страните на триъгълник. Да се намери броят на реалните корени на уравнението:

$$x^2 - 2c\sqrt{2(a^2 + b^2)}x + (a^2 - b^2)^2 + c^4 = 0.$$

Решение: Броят на реалните корени зависи от знака на дискриминантата:

$$\frac{1}{4}D = c^2 2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 - c^4. \text{ Като използваме, че } 2(a^2 + b^2) = ((a+b)^2 + (a-b)^2),$$

$$\text{имаме: } \frac{1}{4}D = c^2 2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 - c^4 = c^2((a+b)^2 + (a-b)^2) - (a^2 - b^2)^2 - c^4. \quad (1 \text{ т.})$$

Разкриваме скобите, групираме събираемите и разлагаме на множители:

$$c^2((a+b)^2 + (a-b)^2) - (a^2 - b^2)^2 - c^4 = c^2(a+b)^2 - c^4 + c^2(a-b)^2 - (a-b)^2(a+b)^2 = \quad (1 \text{ т.})$$

$$c^2((a+b)^2 - c^2) - (a-b)^2((a+b)^2 - c^2) = ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2).$$

След повторно разлагане получаваме:

$$((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2) = (a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b). \quad (1 \text{ т.})$$

Тъй като a , b и c са страни на триъгълник, то $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$. (1 т.) Освен това $a+b > c$, $b+c > a$ и $c+a > b$. (2 т.) Следователно:

$$(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b) > 0 \text{ и уравнението има два реални корена.} \quad (1 \text{ т.})$$

Задача 8.4. За всяко реално число x означаваме с $[x]$ най-голямото цяло число, което е по-малко или равно на x . Да се намерят всички прости числа p , за които числото

$$\left[\frac{p^2+1}{2} \right] + \left[\frac{p^2+2}{3} \right] + \left[\frac{p^2+7}{8} \right] + \left[\frac{p^2+18}{24} \right]$$

е просто.

Решение: При $p=2$ имаме

$$\left[\frac{p^2+1}{2} \right] + \left[\frac{p^2+2}{3} \right] + \left[\frac{p^2+7}{8} \right] + \left[\frac{p^2+18}{24} \right] = \left[\frac{5}{2} \right] + \left[\frac{6}{3} \right] + \left[\frac{11}{8} \right] + \left[\frac{22}{24} \right] = 2+2+1+0=5,$$

което е просто число. Следователно $p=2$ е решение на задачата. (1 т.)

При $p=3$ имаме

$$\left[\frac{p^2+1}{2} \right] + \left[\frac{p^2+2}{3} \right] + \left[\frac{p^2+7}{8} \right] + \left[\frac{p^2+18}{24} \right] = \left[\frac{10}{2} \right] + \left[\frac{11}{3} \right] + \left[\frac{16}{8} \right] + \left[\frac{27}{24} \right] = 5+3+2+1=11,$$

което също е просто число. Следователно и $p=3$ е решение на задачата. (1 т.)

Нека $p \geq 5$ е просто число. Тогава $p^2-1=(p-1)(p+1)$, което е произведение на две последователни четни числа и следователно се дели на 8. (1 т.) Освен това разглежданото произведение се дели и на 3, тъй като едно от числата $p-1$ или $p+1$ се дели на 3. (1 т.) Заклучаваме, че p^2-1 се дели на 24 и следователно $p^2=24k+1$ (k е естествено число). Оттук получаваме

$$\begin{aligned} \left[\frac{p^2+1}{2} \right] + \left[\frac{p^2+2}{3} \right] + \left[\frac{p^2+7}{8} \right] + \left[\frac{p^2+18}{24} \right] &= \left[\frac{24k+2}{2} \right] + \left[\frac{24k+3}{3} \right] + \left[\frac{24k+8}{8} \right] + \left[\frac{24k+19}{24} \right] = \\ &= 12k+1+8k+1+3k+1+k=24k+3. \end{aligned} \quad (2 \text{ т.})$$

Полученото число не може да бъде просто, защото се дели на 3 и е по-голямо от 3. (1 т.)

Така, $p=2$ и $p=3$ са единствените решения на задачата.