Решения и примерно точкуване

Задача 6.1. Стая има дължина 5,5 *м*, широчина 4 *м*, височина 2 *м* 80 *см*, врата с размери 2 *м* на 75 *см*, разположена на едната малка стена, и прозорец, заемащ 35% от едната голяма стена. Работник, започвайки работа в 7:55, успял до 9:32 да боядиса тавана и стената, на която е прозорецът. В колко часа́ трябва да продължи работа работникът, за да успее да боядиса останалите стени до 12:00 същия ден? (Считаме, че таванът и стените се боядисват еднакво бързо. Прозорецът и вратата не се боядисват.)

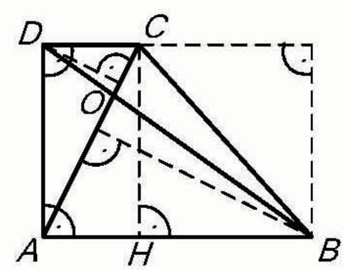
Решение: Стените имат лица $5,5.2,8=15,4$ *кв.м* и $4.2,8=11,2$ *кв.м*. Боядисаната до 9:32 площ е $4.5,5+0,65.15,4=22+10,01=32,01$ *кв.м*. (1 т.), като работата е продължила $5+60+32=97$ *мин*. (1 т.) Боядисвани са по $32,01:97=0,33$ *кв.м* на минута. (1 т.) За боядисване са останали $15,4+2.11,2-2.0,75=36,3$ *кв.м*, (1 т.) за които са нужни $36,3:0,33=110$ *мин* $=1$ *ч* 50 *мин*. (1 т.) Работникът трябва да продължи в 10:10 часа́. (1 т.)

Задача 6.2. Даден е трапец $ABCD$, диагоналите на който AC и BD се пресичат в т. O и $AO=3OC$. Бедрото AD е перпендикулярно на основите, лицето на ΔCOB е 12 *кв.см*.

а) Намерете лицето на трапеца $ABCD$.

б) Докажете, че височината на трапеца през върха C разделя трапеца на две равнолицеви части.

Решение: а) Триъгълниците AOB и COB имат обща височина от върха B, откъдето $S_{AOB}=3S_{COB}=36$ *кв.см*. (1 т.) Триъгълниците ACD и BCD имат обща основа и равни височини и следователно $S_{ACD}=S_{BCD}$. Но $S_{AOD}=S_{ACD}-S_{COD}=S_{BCD}-S_{COD}=S_{COB}=$ $=12$ *кв. см*. (1 т.) Триъгълниците COD и AOD имат обща височина от върха D и $S_{COD}=\frac{1}{3}S_{AOD}=4$ *кв.см*. (1 т.) Лицето на трапеца е $12+12+36+4=64$ *кв.см*. (1 т.)



б) Нека CH е височината на трапеца от върха C. Тогава $AHCD$ е правоъгълник и лицето му е 2 пъти по-голямо от лицето на триъгълника ACD. (1 т.) Имаме $S_{ACD}=S_{AOD}+S_{COD}=12+4=16$ *кв.см*. и следователно $S_{AHCD}=2.16=32$ *кв.см* $=\frac{1}{2}S_{ABCD}$. (1 т.)

Задача 6.3. Естествените числа n и k $(k>1)$ са такива, че сборът от цифрите на числото n^k е равен на 9, а произведението от цифрите му е равно на 24. Да се намерят n и k.

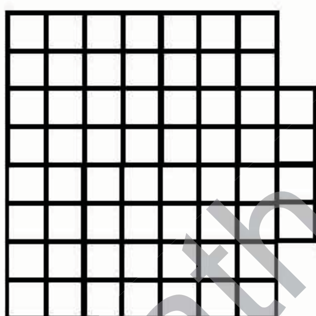
Решение: От условието следва, че в записа на числото n^k не може да се среща цифрата 0. Не могат да се срещат също цифрите 5, 7 и 9, тъй като тези цифри не са делители на 24. (1 т.) Да предположим, че в записа на n^k участва 8. Тогава освен осмицата трябва да има само една единица $(8+1=9)$ и няма как произведението на цифрите на n^k да е равно на 24. Следователно цифрата 8 не участва в записа на n^k. (1 т.) Да предположим сега, че в записа участва цифрата 6. Тогава сборът на останалите цифри трябва да е равен на 3, а това е възможно само ако останалите цифри са 1 и 2 или ако са три единици. Но и в двата случая няма как произведението от цифрите на n^k да е равно на

24. (1 т.) Заключаваме, че всички цифри в записа на n^k са измежду 1, 2, 3 и 4. Ако цифрата 4 участва, то тя е само една. Тогава сборът на останалите цифри трябва да е равен на 5, а произведението им на 6. Оттук следва, че в записа на n^k трябва да има точно една цифра 3. За останалите цифри получаваме, че имат сбор 2 и произведение 2, а това е възможно точно когато в записа участва единствена двойка. Следователно в този случай цифрите на n^k са три: 2, 3 и 4. Ето защо n^k е някое от шестте числа: 234, 243, 324, 342, 423 и 432. Тъй като $234 = 2\cdot 3^2\cdot 13$, $243 = 3^5$, $324 = 2^2\cdot 3^4 = 18^2$, $342 = 2\cdot 3^2\cdot 19$, $423 = 3^2\cdot 47$ и $432 = 2^4\cdot 3^3$, то оттук получаваме решенията $n = 3$, $k = 5$ и $n = 18$, $k = 2$. (2 т.) Нека сега в n^k не участва цифрата 4, т.е. участващите в записа на n^k цифри са 1, 2 и 3. За да бъде произведението на тези цифри 24, трябва да имаме три двойки и една тройка. Тъй като $2+2+2+3=9$, цифрата 1 не може да участва. Заключаваме, че за n^k има още четири възможности: 2223, 2232, 2322 и 3222. Сега $2223 = 3^2\cdot 13\cdot 19$, $2232 = 2^3\cdot 3^2\cdot 31$, $2322 = 2\cdot 3^3\cdot 43$ и $3222 = 2\cdot 3^2\cdot 179$, откъдето не получаваме нови решения. (2 т.) Така, единствените решения на задачата са $n = 3$, $k = 5$ и $n = 18$, $k = 2$.

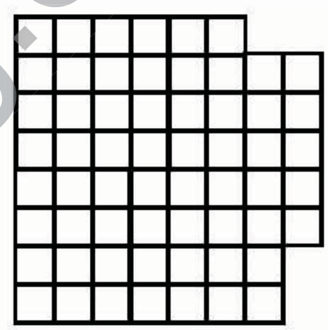
Задача 6.4. Квадратна дъска 8×8 е разделена на квадратчета 1×1, след което от нея са изрязани два правоъгълника 1×2. Възможно ли е останалата част от дъската да се покрие с плочки от домино с размери 1×2, половината от които са хоризонтални, ако:

а) двата правоъгълника са изрязани, както е показано на Черт. 1;

б) двата правоъгълника са изрязани, както е показано на Черт. 2.

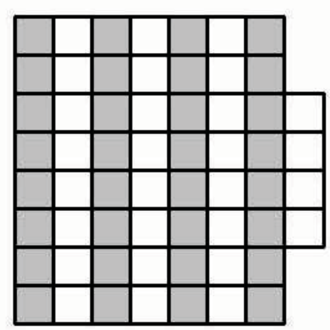


Черт. 1



Черт. 2

Решение: а) Не е възможно. Оцветяваме дъската по колони в два цвята: черно и бяло, както е показано. (1 т.) Всички квадратчета са $64-4=60$ и са необходими $60:2=30$ плочки от домино. Следователно 15 от плочките трябва да са хоризонтални и 15 трябва да са вертикални. Броят на черните квадратчета е $4.8=32$, а този на белите е $3.8+4=28$. (1 т.) За една хоризонтална плочка са необходими едно черно и едно бяло квадратче, а за една вертикална плочка – съответно две бели или две черни. (1 т.) От друга страна 15 хоризонтални плочки покриват 15 бели и 15 черни квадратчета. Следователно за вертикалните остават $32-15=17$ черни и $28-15=13$ бели квадратчета. Тъй като 17 и 13 са нечетни числа, покриването е невъзможно. (1 т.)



б) Възможно е. Оцветяваме дъската по същия начин. Сега черните квадратчета са $3.8+7=31$, а белите са $3.8+5=29$. Хоризонталните плочки ще покрият 15 бели и 15 черни квадратчета. Следователно за вертикалните остават $31-15=16$ черни и $29-15=14$ бели квадратчета. (1 т.) Показан е пример на такова покриване. (2 т.)