Решения и примерно точкуване

Задача 5.1. Намерете стойността на израза: $A = x - 0{,}01.b$, ако

$$b = 3{,}54.73 + 0{,}23.25 + 35{,}4.2{,}7 + 1{,}7.2{,}5\,,$$

а x е неизвестното число от равенството $5{,}1:(x - 5{,}97) + 1{,}25 = 68{,}5.2{,}5$.

Решение: Отг. $b = 364$, $x = 6$, $A = 2{,}36$.

$$b = 3{,}54.73 + 0{,}23.25 + 35{,}4.2{,}7 + 1{,}7.2{,}5$$
$$b = 3{,}54.73 + 35{,}4.2{,}7 + 0{,}23.25 + 1{,}7.2{,}5$$
$$b = 3{,}54.73 + 3{,}54.27 + 0{,}23.25 + 0{,}17.25$$
$$b = 3{,}54(73 + 27) + 25(0{,}23 + 0{,}17) \quad \text{(2 т.)}$$
$$b = 3{,}54.100 + 25.0{,}4$$
$$b = 354 + 10$$
$$b = 364$$

$$5{,}1:(x - 5{,}97) + 1{,}25 = 68{,}5.2{,}5$$
$$5{,}1:(x - 5{,}97) + 1{,}25 = 171{,}25$$
$$5{,}1:(x - 5{,}97) = 171{,}25 - 1{,}25$$
$$5{,}1:(x - 5{,}97) = 170 \quad \text{(2 т.)}$$
$$x - 5{,}97 = 5{,}1:170$$
$$x = 5{,}97 + 0{,}03$$
$$x = 6$$

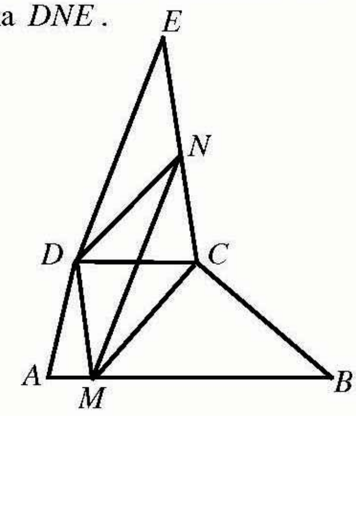
$$A = x - 0{,}01b$$
$$A = 6 - 0{,}01.364$$
$$A = 6 - 3{,}64 \quad \text{(2 т.)}$$
$$A = 2{,}36$$

Задача 5.2. В книжарницата Ани си харесала четири книги, но забелязала, че не ѝ достигат 2 лв., за да си ги купи. Тя пресметнала, че ако си купи книгите без първата, ще ѝ останат 4,50 лв., ако си купи книгите без втората, ще ѝ останат 5,30 лв, ако си купи книгите без третата, ще ѝ останат 3,90 лв., а ако си купи книгите без четвъртата, ще ѝ останат 4,90 лв. Колко лева е имала Ани и колко струва всяка от четирите книги?

Решение: Ако към общата цена на втората, третата и четвъртата книга прибавим 4,50 лв., ще получим сумата, с която е разполагала Ани. (1 т.) Ако прибавим 2 лв. повече, т.е. 6,50 лв., ще получим увеличената с 2 лв. първоначална сума на Ани, което е общата цена на четирите книги. (1 т.) Следователно четирите книги без първата и още 6,50 лв. струват колкото четирите книги. Оттук заключаваме, че първата книга струва 6,50 лв. (2 т.) По същия начин получаваме, че втората книга струва $5{,}30 + 2 = 7{,}30$ лв., третата книга струва $3{,}90 + 2 = 5{,}90$ лв., а четвъртата струва $4{,}90 + 2 = 6{,}90$ лв. (1 т.) Ани е имала:

$$6{,}50 + 7{,}30 + 5{,}90 + 6{,}90 - 2 = 26{,}60 - 2 = 24{,}60 \text{ лв. (1 т.)}$$

Задача 5.3. Даден е трапец $ABCD$ с лице 30 *кв. см*. Основите AB и CD изпълняват условието $AB = 2CD$. Извън трапеца е построен триъгълник DCE. Точката M лежи на основата AB и DM е успоредна на EC. Точката N лежи на отсечката CE и MN е успоредна на DE. Да се намери лицето на триъгълника DNE.



Решение: Нека $CD = a$ и h е височината на трапеца. Тогава $AB = 2a$ (1 т.) и $S_{ABCD} = \dfrac{2a + a}{2} \cdot h = 30$, откъдето $ah = 20$. (1 т.) От друга страна $S_{DMC} = \dfrac{a.h}{2} = 10$. (1 т.) Освен това триъгълниците DMC и DMN имат обща страна DM и равни височини към DM съответно от върховете C и N (защото правите DM и CN са успоредни). Следователно $S_{DMN} = S_{DMC} = 10$. (2 т.) Тъй като диагоналът DN разделя успоредника $DMNE$ на триъгълниците DMN и DNE, които са с равни лица, то $S_{DNE} = 10\,кв.\ см$. (2 т.)

Задача 5.4. Учителката записва на дъската няколко различни естествени числа, а учениците трябва да запишат в тетрадките си всички възможни сборове на числата по двойки. При това, ако един сбор се получи повече от един път, то той трябва да се запише в тетрадките само веднъж. Например, ако на дъската са записани числата 1, 2, 6 и 7, учениците трябва да запишат в тетрадките си по веднъж числата 3, 7, 8, 9 и 13.

а) Учителката записала на дъската 5 числа. Колко най-малко и колко най-много числа могат да запишат учениците в тетрадките си?

б) Колко най-малко числа трябва да запише учителката на дъската, за да могат учениците да запишат в тетрадките си точно 11 числа?

Решение: а) Нека записаните числа на дъската са: $a < b < c < d < e$. (1 т.) Тогава сумите $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, $b+e$, $c+e$ и $d+e$, които са 7 на брой, са различни, защото са наредени по големина. Следователно учениците трябва да запишат в тетрадките си поне 7 числа. (1 т.) Ако на дъската са записани например числата 1, 2, 3, 4 и 5, лесно може да се провери, че учениците трябва да запишат точно 7 суми – числата от 3 до 9 включително. (1 т.) Най-голям брой числа, които учениците могат да запишат в тетрадките си, ще се получи, ако всички двойки суми са различни. Тъй като броят на всички двойки суми е $4+3+2+1=10$, то най-големият възможен брой числа, които могат да се запишат в тетрадките, е 10. (1 т.) Това може да се случи, ако на дъската са записани например числата 1, 2, 4, 8 и 16. (1 т.)

б) От решението на а) следва, че на дъската трябва да бъдат записани поне 6 числа. (1 т.) Това е търсеният най-малък брой, защото примерът със записани числа 1, 2, 3, 4, 5 и 8 дава точно 11 различни суми – всички числа от 3 до 13 включително. (1 т.)