

## Решения и примерно точкуване

**Задача 4.1.** Дадени са числовите изрази:

$$A = 15 - 5 \cdot (55503 : 7 - 47508 : 6) : 5; \quad B = (543.4 - 4326 : 2) : 3 + 6 \quad \text{и}$$

$$C = [(1999 + 2000 + 2001 + 2002) - (2009 + 2010 + 2011)].3 - 591.10.$$

Пресметнете стойностите им.

*Решение:*

$$A = 15 - 5 \cdot (55503 : 7 - 47508 : 6) : 5$$

$$B = (543.4 - 4326 : 2) : 3 + 6$$

$$A = 15 - 5 \cdot (7929 - 7918) : 5$$

$$B = (2172 - 2163) : 3 + 6$$

$$A = 15 - 5 \cdot 11 : 5 \quad (2 \text{ т.})$$

$$B = 9 : 3 + 6$$

$$A = 15 - 11$$

$$B = 3 + 6$$

$$A = 4$$

$$B = 9$$

$$C = [(1999 + 2000 + 2001 + 2002) - (2009 + 2010 + 2011)].3 - 591.10$$

$$C = (8002 - 6030).3 - 591.10$$

$$C = 1972.3 - 5910$$

(2 т.)

$$C = 5916 - 5910$$

$$C = 6$$

**Задача 4.2.** Качвайки се на лифта, забелязах, че сядам на седалка с номер 5. Точно по средата на пътя срещнах седалката с номер 130.

а) Намерете броя на седалките, ако те са подредени по номера.

б) Една седалка изминава 50 м за една минута, а разстоянието между всеки две седалки е 8 м. За колко минути група от 26 ученици ще се изкачи на върха, ако на всяка седалка пътува по един пътник?

*Решение:* а)  $(130 - 5) \cdot 2 = 125 \cdot 2 = 250$  седалки. (2 т.)

б) Дължината на въжето на лифта е  $250.8 = 2000$  м. Тогава разстоянието до върха е  $2000 : 2 = 1000$  м. (1 т.) Първият ученик се изкачва за  $1000 : 50 = 20$  минути. (1 т.) Когато той слизга, 26-ият ученик след него се намира на разстояние  $25.8 = 200$  м. (1 т.) Това разстояние се изминава за  $200 : 50 = 4$  минути. Следователно групата ще се изкачи за  $20 + 4 = 24$  минути. (1 т.)

**Задача 4.3.** Като се използват девет различни цифри, всяка по веднъж, са записани три трицифрени числа със сбор 2011. Например  $381 + 704 + 926 = 2011$  или  $413 + 620 + 978 = 2011$  и т.н. Нека  $A$  е най-малкото от трите записани трицифрени числа. Кое е най-голямото число, което може да бъде равно на  $A$ ?

$$\begin{array}{r} * * * \\ + * * * \\ \hline * * * \\ \hline 2 0 1 1 \end{array}$$

*Решение:* Отг.  $A = 496$ . Ще използваме, че сумата на всички цифри е 45. За да завърши сумата на единиците на трите числа на 1, тя трябва да е равна на 11 или 21. (1 т.) Ако сумата е 21, то сумата на десетиците на трите числа трябва да е равна на 19 или 9. Ако е 19, то  $21 + 19 = 40$  и трябва сумата на трите стотици да е най-много 5 ( $40 + 5 = 45$ ), което е невъзможно, защото сумата на три различни ненулеви цифри е поне  $1 + 2 + 3 = 6$ . (1 т.) Ако сумата на трите десетици е 9, то  $21 + 9 = 30$  и трябва сумата на трите стотици да е най-много 15 ( $30 + 15 = 45$ ), а в същото време да е равна на 19, за да е възможно  $19 + 1 = 20$ . Заключаваме, че сумата на трите единици е точно 11. (1 т.) Сега

сумата на десетиците на трите числа е 20 или 10. Ако е 20, то сумата на трите стотици е най-много 14, а в същото време трябва да е равна на 18. В крайна сметка получаваме, че сумата на трите единици е 11, а сумата на трите десетици е 10. (1 т.) Сега сумата на трите стотици трябва да е 19. Търсеното число е по-малко от 600, защото  $600 + 700 + 800 = 2100 > 2011$ . Да проверим възможно ли е то да започва с 5. Ако започва с 5, сумата на другите две стотици е 14, което е възможно само ако трите стотици са 5, 6 и 8. За сумата на единиците на трите числа (в никакъв ред) има 3 случая:  $9+2+0=11$ ,  $7+4+0=11$  и  $7+3+1=11$ . В нито един от тези случаи обаче не е възможно да се образува сума 10 с някои три от неизползваните цифри. Следователно цифрата на стотиците на търсеното число е най-много 4. (1 т.) Тъй като търсим възможно най-голямото число, то първата възможност е да проверим за число от вида  $49*$ . Сега единствената възможност за стотиците на другите две числа е те да са 7 и 8 ( $4+7+8=19$ ), а за десетиците на другите две числа единствената възможност е те да са 0 и 1 ( $9+1+0=10$ ). Тогава най-голямото възможно число, което търсим, може да бъде 496. (1 т.) За цифрите на единиците на другите две числа остава единствената възможност да са 2 и 3. По този начин получаваме пример, който дава решение на задачата:  $496 + 713 + 802 = 2011$ . (1 т.)

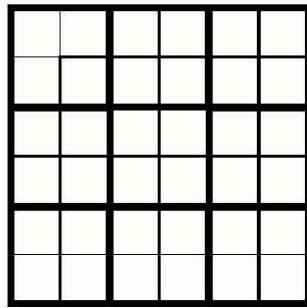
**Задача 4.4.** Дъска е разграфена на единични квадратчета, всяко от които е с дължина на страната 1 см. Гошко и Тошко разполагат с червени и сини правоъгълни плочки от домино с размери 2 см и 1 см. Гошко покрива дъската с червени плочки без застъпване. След това Тошко отстранява червените плочки и се стреми да покрие дъската със сини плочки без застъпване така, че никоя синя плочка да не заеме мястото на някоя червена. Винаги ли е възможно Тошко да покрие дъската по указания начин, ако дъската е:

- а) правоъгълник с размери 5 см и 4 см;  
б) квадрат със страна 6 см?

*Решение:*



Черт. 1



Черт. 2

а) Не винаги е възможно. Да разгледаме например покриването с червени плочки от Черт. 1, в което всички плочки са вертикални (1 т.) и да вземем например първия ред  $5 \times 2$ . (1 т.) За да е изпълнено условието на задачата, Тошко трябва да покрие този ред само с хоризонтални сини плочки. Очевидно това е невъзможно. (1 т.)

б) Винаги е възможно. Да разделим дъската на квадрати  $2 \times 2$  (вж. Черт. 2) и да разгледаме един такъв квадрат. (1 т.) Ако в него не се е намирала изцяло червена плочка, то Тошко може да постави в този квадрат 2 хоризонтални или 2 вертикални плочки по избор. (1 т.) Ако в разглеждания квадрат се е намирала хоризонтална червена плочка, то в него със сигурност не е могло да има вертикална плочка (изцяло) и Тошко може да постави 2 вертикални плочки. Аналогично, ако в разглеждания квадрат се е намирала вертикална червена плочка, то Тошко може да постави 2 хоризонтални плочки. (1 т.) Описаното покриване прилагаме за всички квадрати  $2 \times 2$ . Със сигурност никоя синя плочка няма да заеме мястото на някоя червена. (1 т.)