

Зимни математически състезания

Варна, 3 – 5 март 2011 г.

Тема за 12. клас

Задача 12.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението

$$|x - 4^a| + |x - 2^a| = 2^{a-1} + 1$$

има безбройно много решения.

Задача 12.2. Да се намери максималната възможна стойност на отношението на дължините на медианите през върховете A и B на $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

Задача 12.3. Нека O е центърът на описаната около неравнобедрен остроъгълен $\triangle ABC$ окръжност. Точки D и E върху страните AC и BC са такива, че $DE \parallel AB$ и CO е ъглополовяща на $\sphericalangle DOE$. Да се докаже, че разстоянието от C до DE е равно на разстоянието от O до AB .

Задача 12.4. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществуват естествени числа x_1, x_2, \dots, x_{10} , по-големи от n , за които числото

$$2^{x_1^2} + 2^{x_2^2} + \dots + 2^{x_{10}^2}$$

е точен квадрат.

Задачите са предложени от:

12.1., 12.4. – Олег Мушкаров; 12.2., 12.3. Николай Николов.