Кратки решения на задачите

Задача 12.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$|x-4^a|+|x-2^a|=2^{a-1}+1$$

има безбройно много решения.

Решение. От графиката на функцията $f(x)=|x-p|+|x-q|$ следва, че уравнението $f(x)=r$ има безбройно много решения тогава и само тогава, когато $|p-q|=r>0$. Следователно за даденото уравнение това е изпълнено тогава и само тогава, когато

$$(\star)\qquad |4^a-2^a|=2^{a-1}+1.$$

Полагаме $2^a=t>0$ и получаваме уравнението $|t^2-t|=\dfrac{t}{2}+1$. Уравнението $t^2-t=\dfrac{t}{2}+1$ има единствен положителен корен $t=2$, а уравнението $t-t^2=\dfrac{t}{2}+1$ няма реални корени. Следователно $2^a=2$ и търсената стойност на a е $a=1$.

Оценяване. За получаване на условието $\star$ или еквивалентно на него – 3 т. За решаване на уравнението $\star$ – 3 т.

Задача 12.2. Да се намери максималната възможна стойност на отношението на дължините на медианите през върховете A и B на $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ACB=60^\circ$.

Решение. (3 т.) Понеже

$$4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2=2b^2+2(a^2+b^2-ab)-a^2=4b^2+a^2-2ab,$$

$4m_b^2=4a^2+b^2-2ab$, то $\frac{m_a^2}{m_b^2}=\frac{x^2-2x+4}{4x^2-2x+1}=: f(x)$, където $x=a/b>0$ (за всяко $x>0$ съществува съответен триъгълник). **(3 т.)** Имаме, че $f'(x)=\frac{6(x^2-5x+1)}{(4x^2-2x+1)^2}$ и стандартно следва, че максималната стойност M на $f(x)$ се достига при $x=\frac{5-\sqrt{21}}{2}>0$ и $M=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$. Следователно отговорът на задачата е $\sqrt{M}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$.

Забележка. Задачата може да се реши и като се използва, че $M>1/4$ трябва да е такова, че уравнението $f(x)=M$ да има двоен положителен корен.

Задача 12.3. Нека O е центърът на описаната около неравнобедрен остроъгълен $\triangle ABC$ окръжност. Точки D и E върху страните AC и BC са такива, че $DE||AB$ и CO е ъглополовяща на $\sphericalangle DOE$. Да се докаже, че разстоянието от C до DE е равно на разстоянието от O до AB.

Решение. (3 т.) Ако $\sphericalangle DOC=\psi$, от синусовата теорема следва, че

$$\frac{CD}{\sin\psi}=\frac{CO}{\sin(90^\circ+\beta-\psi)},\quad \frac{CE}{\sin\psi}=\frac{CO}{\sin(90^\circ+\alpha-\psi)}$$

и тогава

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{CD}{CE}=\frac{\cos(\psi-\alpha)}{\cos(\psi-\beta)}.$$

(2 т.) Оттук

$$\sin\beta.\cos(\psi-\beta)=\sin\alpha.\sin(\psi-\alpha)\Leftrightarrow\sin\psi-\sin(2\beta-\psi)=\sin\psi-\sin(2\alpha-\psi)$$

$$\Leftrightarrow\sin(\alpha-\beta).\cos(\gamma+\psi)=0.$$

Понеже $\alpha \neq \beta$, $\gamma < \pi/2$ и $\psi \leq \pi$, то $\gamma + \psi = \pi/2$. **(2 т.)** Разглеждайки $\triangle CDO$, следва, че $\sphericalangle CDE = \alpha = 90^\circ - \sphericalangle ODE/2$. Значи C е центърът на външновписаната за $\triangle ODE$ окръжност към страната DE. Тогава

$$\operatorname{dist}(C, DE) = \operatorname{dist}(C, DO) = CO\cos\gamma = \operatorname{dist}(O, AB).$$

Забележка. Твърдението на задачата означава, че ако H е ортоцентърът на $\triangle ABC$, то DE е симетралата на CH. Обратно, може да се докаже, че ако DE е симетралата на CH, то C е центърът на външновписаната за $\triangle ODE$ окръжност към страната DE.

Задача 12.4. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществуват естествени числа $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, по-големи от n, за които числото

$$2^{x_1^2} + 2^{x_2^2} + \cdots + 2^{x_{10}^2}$$

е точен квадрат.

Решение. Нека $x_1 = x_2 = \cdots = x_8 = x$, $x_9 = y$ и $x_{10} = z$. Търсим естествени числа a и b, за които

$$8.2^{x^2} + 2^{y^2} + 2^{z^2} = (2^a + 2^b)^2.$$

Достатъчно е да са изпълнени равенствата $y^2 = 2a$, $z^2 = 2b$ и $x^2 + 3 = a + b + 1$. Оттук $a = 2k^2$, $b = 2m^2$ и $x^2 = 2(k^2 + m^2) - 2$ $(\star)$. Ще покажем, че последното уравнение има безбройно много решения в естествени числа.

Първи начин. Нека (u, v) е решение в естествени числа на уравнението на Пел $u^2 - 2v^2 = 1$ $(\star\star)$. Тогава лесно се проверява, че $x = 2uv$, $m = u$ и $k = 2v^2$ изпълняват горните равенства. Следователно числата $x_1 = x_2 = \cdots = x_8 = 2uv$, $x_9 = 4v^2$ и $x_{10} = 2u$ изпълняват условието, като изберем и $v > n$. Съществуването на такива u и v се гарантира от факта, че $(\star\star)$ има безбройно много решения в естествени числа.

Втори начин. Полагаме $x = 2q$, $k = q + p$, $m = q - (p + 1)$. Тогава $(\star)$ е еквивалентно на $q = p^2 + p$. Следователно за всяко естествено число $p > n$ числата $x_1 = \cdots = x_8 = 2(p^2 + p)$, $x_9 = 2(p^2 + 2p)$ и $x_{10} = 2(p^2 - 1)$ изпълняват даденото условие.

Оценяване. Свеждане до уравнение с безбройно много решения (като (*)) – 4 т. Обосновка на съществуването на безбройно много решения на съответното уравнение (които са по-големи от n) – 3 т.