Министерство на Образованието, Младежта и Науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически състезания

Варна, 3 – 5 март 2011 г.

Тема за 11. клас

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$\log_x a + 2\log_{ax} a = 6\log_{a^2x} a$$

има поне две решения в интервала $[a, +\infty)$.

Задача 11.2. Даден е равнобедрен остроъгълен триъгълник ABC, $AC = BC$. Правата, през центъра на описаната окръжност, която е успоредна на бедрото BC разделя триъгълника на две части с равни лица. Да се намери $\sphericalangle ACB$.

Задача 11.3. В турнир по футбол участват 2011 отбора, като всеки два отбора играят помежду си точно по един път. В крайното класиране точките на съседни в класирането отбори се различават с 1. Колко най-много точки може да има последния в класирането?

(В турнир по футбол за победа се дават 3 точки, за равен – 1 точка и за загуба – 0 точки.)

Задача 11.4. Нека α е рационално положително число. За всяко естествено число n с x_n означаваме броят на делителите d на n, за които

$$\frac{n^\alpha}{10^{2011}} < d < \frac{n^\alpha}{10^{2010}}.$$

Да се докаже, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена тогава и само тогава, когато $\alpha < 1$.

Задачите са предложени от:

11.1., 11.2, 11.3.-Емил Колев; 11.4.– Александър Иванов