Кратки решения на задачите

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$\log_x a + 2\log_{ax} a = 6\log_{a^2x} a$$

има поне две решения в интервала $[a, +\infty)$.

Решение. Допустимите стойности са $x > 0,\ x \neq 1,\ a > 0,\ ax \neq 1,\ a^2x \neq 1$. При $a = 1$ всяко $x > 0,\ x \neq 1$ е решение на уравнението. Когато $a \neq 1$ след полагане $t = \log_a x$, записваме уравнението като

$$\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} = \frac{6}{t+2}.$$

Решенията на това уравнение са $t = 1$ и $t = -\frac{2}{3}$, откъдето $x = a$ и $x = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$. Тъй като $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \geq a$ при $a \leq 1$, в този случай решения са $a < 1$. Окончателно търсените стойности са $a \in (0, 1]$.

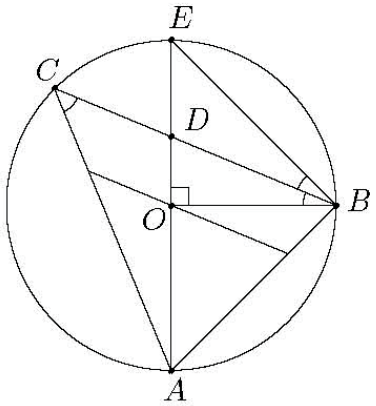
Задача 11.2. Даден е равнобедрен остроъгълен триъгълник ABC, $AC = BC$. Правата, през центъра на описаната окръжност, която е успоредна на бедрото BC разделя триъгълника на две части с равни лица. Да се намери $\sphericalangle ACB$.

Решение. *Първи начин.* Нека правата пресича страните на ABC в точки $P \in AB$ и $Q \in AC$. Да прекараме през O права, успоредна на AC. Тя също разполовява лицето и нека тази права пресича страните на ABC в точки $R \in AB$ и $S \in BC$. Тъй като $S_{RBS} = S_{PBCQ} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, то $S_{RPO} = S_{QOSC}$. Тогава $\sqrt{2}OS = OP$ и от синусовата теорема за $\triangle PBO$ и $\triangle SBO$ получаваме $\frac{OS}{R} = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$ и $\frac{OP}{R} = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$. Следователно

$$\sqrt{2} = \frac{OP}{OS} = \frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{\sin 2\alpha} = \frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{\sin\gamma} = 2\cos\gamma,$$

откъдето намираме $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\gamma = 45^\circ$.

Втори начин. Нека правата AO пресича BC в точка D и описаната около ABC окръжност в точка E. От условието следва, че $AD = R\sqrt{2}$ и тогава $OD = R(\sqrt{2} - 1)$ и $ED = R(2 - \sqrt{2})$.



Понеже $\sphericalangle OBD = \sphericalangle EBD = \frac{1}{2}\gamma$, то BD е ъглополовяща, откъдето

$$\frac{EB}{OB} = \frac{ED}{OD} = \sqrt{2},$$

т.е. $EB = R\sqrt{2}$. Оттук следва, че $\triangle OEB$ ($OB = OE = R, EB = R\sqrt{2}$) е правоъгълен. Следователно $\gamma = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = 45°$.

Задача 11.3. В турнир по футбол участват 2011 отбора, като всеки два отбора играят помежду си точно по един път. В крайното класиране точките на съседни в класирането отбори се различават с 1. Колко най-много точки може да има последния в класирането?

(В турнир по футбол за победа се дават 3 точки, за равен – 1 точка и за загуба – 0 точки.)

Решение. Тъй като срещите са $\frac{n(n-1)}{2}$, то максималния брой точки на всички отбори е $\frac{3n(n-1)}{2}$. Ако последния отбор има k точки, то всички отбори имат общо

$$k + (k+1) + \cdots + (k+n-1) = \frac{2k+n-1}{2}.n \leq \frac{3n(n-1)}{2},$$

откъдето $k \leq n-1$. Ако $k = n-1$, в турнира е имало само победи и тогава точките на всеки отбор ще се делят на 3 и условието не може да е изпълнено. Следователно $k \geq n-2$.

Ще докажем, че при всяко $n \geq 4$, съществува турнир от n отбора, изпълняващ условието на задачата и последния отбор има точно $n-2$ точки. Броят точки в такъв турнир е равен на $\frac{3n-5}{2}.n$, което означава, че броят на ремитата е равен на $\frac{3n(n-1)}{2} - \frac{3n-5}{2}.n = n$.

С индукция по $n \geq 4$ ще построим такъв турнир. При $n = 4$ нека A е победил B и е завършил реми с C и D; B е победил D и е завършил реми с C и накрая, C и D са завършили наравно. Тогава A, B, C и D имат съответно $5, 4, 3, 2$ точки.

Да допуснем, че имаме такъв турнир за някое $n \geq 4$. Да разгледаме турнир с $n+1$ отбора. Да отделим един отбор A и нека в турнира между останалите n отбора да се е получило класиране, удовлетворяващо условието на задачата и последния в класирането има $n-2$ точки. Нека първите три отбора са X, Y и Z.

Нека отборите с точки $n-2$, $n+1$, $n+4$ и т.н. докато стигнем до един от първите три отбора, да победят A.

Ако стигнем до Z нека Z и A завършат реми, Y победи A и A победи всички останали.

Ако стигнем до Y нека Y победи A, X и A завършват реми и A победи всички останали.

Ако стигнем до X нека X и A завършват реми и A победи всички останали.

Във всеки от горните случаи последния отбор има $(n+1)-2$ точки и в турнира има n ремита. Директно се вижда, че такъв турнир удовлетворяма условието на задачата. Следователно търсеният отговор е 2009.

Задача 11.4. Нека α е рационално положително число. За всяко естествено число n с x_n означаваме броят на делителите d на n, за които

$$\frac{n^\alpha}{10^{2011}} < d < \frac{n^\alpha}{10^{2010}}.$$

Да се докаже, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена тогава и само тогава, когато $\alpha < 1$.

Решение. Да допуснем, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена и $\alpha \geq 1$. Ако d е делител на n, то $d_1 = \dfrac{n}{d}$ също е делител на n и тогава от $\dfrac{n^\alpha}{10^{2011}} < d$ следва

$$d_1 < \frac{10^{2011}}{n^{\alpha-1}} \leq 10^{2011}.$$

Това означава, че за d_1 (следователно и за d) имаме краен брой възможности, т.е. x_n е ограничено. Полученото противоречие показва, че $\alpha < 1$.

Нека $\alpha = \frac{p}{q} < 1$. Тъй като множеството на рационалните числа е гъсто, то за всяко естествено число t можем да изберем рационални числа $\dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2}, \ldots, \dfrac{p_t}{q_t}$, всяко от който е в интервала $\left(\dfrac{1}{10^{2011}}, \dfrac{1}{10^{2010}}\right)$.

Нека $N = p_1 p_2 \ldots p_t q_1 q_2 \ldots q_t$ и да изберем $n = N^q$. Да забележим, че за всяко $i = 1, 2, \ldots, t$ числото $\dfrac{p_i}{q_i} N^p$ е цяло и е делител на $n = N^q$. Освен това $n^\alpha = N^p$ и тъй като

$$\frac{n^\alpha}{10^{2011}} < \frac{p_i}{q_i} N^p < \frac{n^\alpha}{10^{2010}},$$

то $x_n \geq t$, което означава, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена.