Министерство на Образованието, Младежта и Науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически състезания

Варна, 3 – 5 март 2011 г.

Тема за 10. клас

Задача 10.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които корените x_1, x_2 на уравнението

$$x^2 - 2ax + a + 2 = 0$$

са реални неотрицателни числа и $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq 2\sqrt{5}$.

Задача 10.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ $(AC < BC)$. Нека M е средата на страната AB, а O и O_1 са центровете на описаните окръжности за $\triangle ABC$ и $\triangle AMC$. Да се пресметне $S_{AOO_1} : S_{ABC}$, ако $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

Задача 10.3. Дадена е „шахматна" дъска с размери $m \times n$. Път в дъската наричаме всяка редица от клетки $A_0, A_1, \ldots, A_n$, такава че за всяко $i = 0, \ldots, n-1$ клетката A_{i+1} е достижима от A_i с един ход на топа. Броят n на ходовете, с които достигаме A_n от A_0 наричаме дължина на пътя $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Разстояние между две клетки A и B наричаме дължината на най-късия път с начало A и край B. Едно множество M от клетки наричаме *добро*, ако всяка клетка от дъската лежи върху най-къс път, започващ в клетка от M и свършващ в клетка от M. Да се определи минималният брой клетки в добро множество.

Задача 10.4. За естествено число $n > 1$ разглеждаме всички двойки естествени числа a и b, за които $1 \leq a < b \leq n$ и $a + b > n$. Означаваме с $f(n)$ броя на двойките, такива че a дели b и с $g(n)$ – броя на двойките, такива че a и b са взаимно прости. Да се намерят всички $n > 2$, за които

$$g(n) - g(n-1) = f(n).$$

Задачите са предложени от:

10.1., 10.2., 10.4 – Керопе Чакърян; 10.3.– Иван Ланджев