Кратки решения на задачите

Задача 10.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които корените x_1, x_2 на уравнението

$$x^2 - 2ax + a + 2 = 0$$

са реални неотрицателни числа и $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \le 2\sqrt{5}$.

Решение. Корените x_1, x_2 са реални и неотрицателни когато $D = 4(a^2 - a - 2) \ge 0$ и $x_1 + x_2 = 2a \ge 0$, $x_1 x_2 = a + 2 \ge 0$. Това дава $a \ge 2$. Сега

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \le 2\sqrt{5} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} \le 20 \Leftrightarrow \sqrt{a+2} \le 10 - a.$$

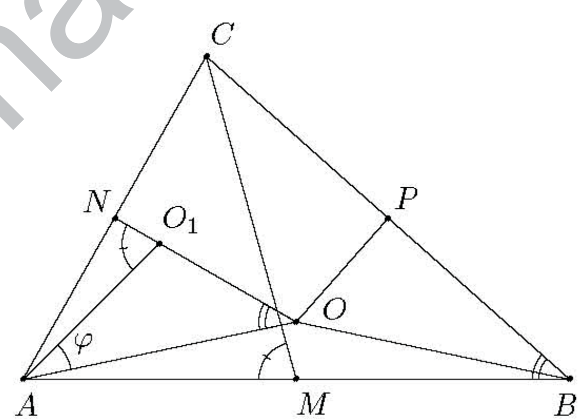
При $a > 10$ това неравенство няма решение, а при $a \in [2, 10]$ то е равносилно с $a + 2 \le (10 - a)^2$, т.е. $a^2 - 21a + 98 \ge 0$. Оттук получаваме $a \in (-\infty, 7] \cup [14, +\infty)$ и предвид $a \in [2, 10]$ търсените стойности на параметъра са $a \in [2, 7]$.

Задача 10.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ $(AC < BC)$. Нека M е средата на страната AB, а O и O_1 са центровете на описаните окръжности за $\triangle ABC$ и $\triangle AMC$. Да се пресметне $S_{AOO_1} : S_{ABC}$, ако $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

Решение. Нека R е радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, $\sphericalangle ABC = \beta$ и N е средата на страната AC. Тогава $ON \perp AC$, $O_1 \in ON$ и $\sphericalangle AON = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC = \beta$ (от $AC < BC$ следва $\sphericalangle AMC < 90^\circ$). Нека $\sphericalangle O_1AO = \varphi$. Имаме

$$\sphericalangle AMC = \frac{1}{2} \sphericalangle AO_1C = \sphericalangle AO_1N = \beta + \varphi.$$

Но $\sphericalangle AMC = \beta + \sphericalangle BCM$ и оттук $\sphericalangle BCM = \varphi$. Следователно $\triangle AOO_1 \sim \triangle CBM$ и тогава $S_{AOO_1} : S_{CBM} = (AO : BC)^2 = (R : BC)^2$.



Ако P е средата на BC, то $\sphericalangle BPO = 90^\circ$, $\sphericalangle BOP = \sphericalangle BAC = 60^\circ$ и $\sin 60^\circ = \frac{BC/2}{R}$, откъдето $\frac{R}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Така $S_{AOO_1} : S_{CBM} = \frac{1}{3}$ и (понеже $S_{CBM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$) намираме $S_{AOO_1} : S_{ABC} = 1 : 6$.

Задача 10.3. Дадена е „шахматна“ дъска с размери $m \times n$. Път в дъската наричаме всяка редица от клетки $A_0, A_1, \ldots, A_n$, такава че за всяко $i = 0, \ldots, n-1$ клетката A_{i+1} е достижима от A_i с един ход на топа. Броят n на ходовете, с които достигаме A_n от A_0 наричаме дължина на пътя $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Разстояние между две клетки A и B наричаме дължината на най-късия път с начало A и край B. Едно множество M от клетки наричаме *добро*, ако всяка клетка от дъската лежи върху най-къс път, започващ в клетка от M и свършващ в клетка от M. Да се определи минималният брой клетки в добро множество.

Решение. Да означим разстоянието между клетките A и B с $d(A, B)$. Очевидно

$$d(A,B) = \begin{cases} 1, & \text{ако клетките } A \text{ и } B \text{ са в една линия,} \\ 2, & \text{ако клетките } A \text{ и } B \text{ са в различни линии.} \end{cases}$$

Нека M е добро множество. Ще докажем, че то съдържа клетки от всяка линия (ред или стълб) на дъската. Да допуснем противното – нека например m-тият ред не съдържа клетки от M. Прозволна клетка C от този ред лежи върху най-къс път от A до B, $A, B \in M$. Съществуват две възможности:

1) $d(A,C) = d(B,C) = 1$. Тогава A, B, C са в една линия и $d(A,B) = 1$. От друга страна $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B) = 2$, противоречие.

2) $d(A,C) = 2$ или $d(B,C) = 2$ (или и двете). Тогава $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B) \geq 3$, отново противоречие с факта, че най-късите пътища са с дължина 1 или 2.

От доказаното следва, че броят на клетките в M е поне $\max\{m, n\}$. Ще построим добро множество с такъв брой клетки. Нека без ограничение на общността $m \leq n$. Да означим с (i, j) клетката, намираща се в i-тия ред и j-тия стълб на дъската. Лесно се проверява, че множеството

$$M = \{(i,i) \mid i = 1, \ldots, m\} \cup \{(m,j) \mid j = m+1, \ldots, n\}$$

е добро.

Задача 10.4. За естествено число $n > 1$ разглеждаме всички двойки естествени числа a и b, за които $1 \leq a < b \leq n$ и $a + b > n$. Означаваме с $f(n)$ броя на двойките, такива че a дели b и с $g(n)$ – броя на двойките, такива че a и b са взаимно прости. Да се намерят всички $n > 2$, за които

$$g(n) - g(n-1) = f(n).$$

Решение. Нека a дели b и $b = aq$, $q \in \mathbb{N}$. Условията $1 \leq a < b \leq n$ и $a + b > n$ приемат вида $q > 1$, $\frac{n}{a} - 1 < q \leq \frac{n}{a}$. Ако $a > \frac{n}{2}$, то $q \leq \frac{n}{a} < 2$ и няма такова q. За всяко $a \leq \frac{n}{2}$ има единствено цяло $q \in \left(\frac{n}{a} - 1, \frac{n}{a}\right]$ (а именно $q = \left[\frac{n}{a}\right]$) и за него $q > \frac{n}{a} - 1 \geq 1$, т.е. $q > 1$. Следователно броят на такива двойки (a, b) е равен на броя на целите числа a с $1 \leq a \leq \frac{n}{2}$, т.е. $f(n) = \left[\frac{n}{2}\right]$.

Нека M_n, $n \geq 3$, е множеството на двойките (a, b), такива че a и b са взаимно прости. Лесно се вижда, че $(a, b) \in M_n$, но $(a, b) \notin M_{n-1}$ точно когато $b = n$, $1 \leq a < n$ и a е взаимно просто с n. Броят на тези двойки е равен на $\varphi(n)$. Не е трудно да се съобрази, че $(a, b) \in M_{n-1}$, но $(a, b) \notin M_n$ точно когато $a + b = n$, т.е. $b = n - a$ и освен това $a < n - a$ и a е взаимно просто с $n - a$ или, еквивалентно, $1 \leq a < \frac{n}{2}$ и a е взаимно просто с n. Броят на тези двойки е равен на $\frac{\varphi(n)}{2}$. Следователно

$$g(n) - g(n-1) = \varphi(n) - \frac{\varphi(n)}{2} = \frac{\varphi(n)}{2}.$$

Сега равенството $g(n) - g(n-1) = f(n)$ приема вида $\frac{\varphi(n)}{2} = \left[\frac{n}{2}\right]$. Ако 2 дели n, то дава $\varphi(n) = n$, което е невъзможно за $n > 1$, а ако 2 не дели n е равносилно с $\varphi(n) = n - 1$ и е изпълнено точно когато n е просто число.

Окончателно, търсените числа са всички прости числа $n > 2$.