МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Перник
Ул. „Св. Св. Кирил и Методий” №11, ☎076-60-48-30

XI клас

<u>Зад.1</u> а) Известно е, че сумата *Sn* от първите *n* члена на аритметична прогресия се представя с формулата $S_n = 6n^2 - 5n$. Да се намери седмият член на тази прогресия.
3 точки

б) Да се намери петият член на растяща геометрична прогресия, първият член на която е $7 - 3\sqrt{5}$ и всеки неин член след първия е равен на разликата на двата му съседни членове.
4 точки

<u>Зад.2</u> Да се намери *x*, ако числата 3^{2x^2+1}, 3^{4x+1}, $\left(\sqrt{3}\right)^{2x^2+3x-1}$, взети в този ред са членове на геометрична прогресия.
7 точки

<u>Зад.3</u> В квадрат *ABCD* са избрани вътрешни точки *P* и *Q* така, че $\measuredangle PAQ = \measuredangle PCQ = 45^\circ$. Да се докаже, че $PQ^2 = BQ^2 + DP^2$.
7 точки

Решения:

<u>Зад.1</u> а) От условието че $S_n = 6n^2 - 5n \Rightarrow S_1 = 6 - 5 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$ (**1 точка). Тогава от** $S_2 = a_1 + a_2 = 6.4 - 10 = 14 \Rightarrow a_2 = 14 - 1 = 13 \Rightarrow d = 12$ **(1 точка)** $\Rightarrow a_7 = 1 + 6.12 = 73$ **(1 точка)**.

б) По условие $a_2 = a_3 - a_1 \Rightarrow a_1 q = a_1 q^2 - a_1$ **(1 точка)** $\Rightarrow q^2 - q - 1 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ **(1 точка).**

От условието, че прогресията е растяща $\Rightarrow$ $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(0,5 точка)** $\Rightarrow a_5 = (7 - 3\sqrt{5})\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 = 2$

(1,5 точка).

<u>Зад.2</u> За да образуват числата геометрична прогресия необходимо е да бъде изпълнено: $\left(3^{4x+1}\right)^2 = 3^{2x^2+1}.\left(\sqrt{3}\right)^{2x^2+3x-1}$ **(1 точка)**. $\Rightarrow 8x + 2 = 2x^2 + 1 + \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{2}$ **(1 точка)**.

$\Rightarrow 6x^2 - 13x - 3 = 0$ **(0,5 точка) и за намиране на корените му** $x_{1;2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{241}}{12}$ **(0,5 точки)**

<u>Зад.3</u> Построяваме *AM* симетрична на *AB* спрямо *AQ* и *CN* симетрична на *CD* спрямо *CP* **(2 точки)**. От построението $\Rightarrow DP = NP$, $\measuredangle DCP = \measuredangle NCP$, както и $BQ = MQ$, $\measuredangle BAQ = \measuredangle MAQ$ и $CD = CN = AM = AB$ **(1точка)**. От $\measuredangle BAQ + \measuredangle DAP = 45^\circ \Rightarrow \measuredangle QAM + \measuredangle DAP = 45^\circ$, но $\measuredangle QAM + \measuredangle PAM = 45^\circ \Rightarrow \measuredangle PAM = \measuredangle DAP \Rightarrow \Delta PAD \cong \Delta PAM \Rightarrow PM = PD$, но $DP = NP \Rightarrow PM = PD = NP$. Аналогично $NQ = QM = QB$ **(2 точки).**
$\Rightarrow \Delta PNQ \cong \Delta PMQ$ откъдето $\Rightarrow \measuredangle PNQ = \measuredangle PMQ$**.** Тогава $\measuredangle PNQ + \measuredangle PMQ = (\measuredangle PNC + \measuredangle CNQ) = \measuredangle CDA + \measuredangle CBQ + \measuredangle PDA + \measuredangle QBA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$**.** Но $\measuredangle PNQ = \measuredangle PMQ \Rightarrow \measuredangle PNQ = \measuredangle PMQ = 90^\circ$**.** Тогава за ΔPQM по теорема на Питагор $\Rightarrow PQ^2 = PM^2 + MQ^2 \Rightarrow PQ^2 = BQ^2 + DP^2$ **(2точки)**.