60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 12-13.03.2011 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 5.1. Да се пресметне стойността на израза:

$$C.C + C.(C-1) + C.(C-2) + C.(C+3), \text{ където}$$

$C = A - B$, $A = 1,23.12,4.125 + (1+2+3+4+5+6+7).25$ и $B = 123.1,24.12,5 + 1,25.400.1,2$.

Решение:

$A = 1,23.12,4.125 + (1+2+3+4+5+6+7).25 = 1,23.12,4.125 + 28.25 = 1,23.12,4.125 + 700$

$B = 123.1,24.12,5 + 1,25.400.1,2 = 123.1,24.12,5 + 600$

Произведенията от изразите A и B са равни, т.е. $1,23.12,4.125 = 123.1,24.12,5$ и следователно $C = A - B = 700 - 600 = 100$. Тогава

$$C.C + C.(C-1) + C.(C-2) + C.(C+3) =$$

$$= 100.100 + 100.99 + 100.98 + 100.103 = 100(100 + 99 + 98 + 103) = 100.400 = 40\ 000.$$

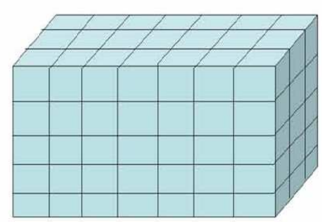
Схема на оценяване: За пресмятане на $C = 100$ общо **5 т.** и още **2 т.** за завършване на задачата. Разпределението на първите **5 т.** е по **2 т.** за A и B, както и **1 т.** за $C = A - B = 700 - 600 = 100$. Ако се следва описаното решение, **1 т.** за получаване на $A = 1,23.12,4.125 + 700$, **1 т.** за получаване на $B = 123.1,24.12,5 + 600$ и **2 т.** за съображението $1,23.12,4.125 = 123.1,24.12,5$.

Задача 5.2. Правоъгълен паралелепипед е съставен от 105 еднакви кубчета. Ако от всяка стена се извади централното кубче, повърхнината на полученото тяло ще бъде с 384 *кв. см* по-голяма от повърхнината на паралелепипеда. Намерете:

а) дължината на ръба на едно кубче и размерите на паралелепипеда;

б) лицето на повърхнината на правоъгълния паралелепипед;

в) обема на правоъгълния паралелепипед.



Решение: а) Да означим с a *см* ръба на едно кубче. Всяко извадено кубче увеличава повърхнината с $4.a.a$ *кв. см*. Тъй като са отнемат 6 кубчета, то повърхнината ще се увеличи с $24.a.a$ *кв. см*. От условието $384 = 24.a.a$ намираме $a.a = 16$ и следователно $a = 4$ *см*. Тогава размерите на паралелепипеда са: $7.4 = 28$ *см*, $3.4 = 12$ *см* и $5.4 = 20$ *см*.

б) Лицето на повърхнината на паралелепипеда е равно на

$$2(28.12 + 28.20 + 20.12) = 2.1136 = 2272 \text{ кв. см}.$$

в) $V = 28.12.20 = 6720$ *куб. см*.

Схема на оценяване: общо **3 т.** за намиране ръба на едно кубче, от които **1 т.** за съображението, че всяко извадено кубче увеличава повърхнината с $4.a.a$ *кв. см* и **1 т.**, че общото увеличение на повърхнината е с $24.a.a$ *кв. см*; **1 т.** за пресмятане на размерите; **2 т.** за б) и **1 т.** за в).

Задача 5.3. Да се намери най-голямото естествено число n, за което съществува n – цифрено число с различни цифри така, че числото да се дели на всяка своя цифра.

Решение: Търсеното число не може да съдържа нулата в записа си, защото с нулата не може да се дели. Следователно, за да се дели числото на 5, то трябва да завършва на 5. Но ако числото завършва на 5, със сигурност то не се дели на 2, 4, 6 и 8, откъдето следва, че числото е най-много петцифрено. Затова ще се откажем от петицата и ще покажем, че съществува число с повече цифри, което изпълнява условието на задачата. Сумата на всички цифри без 0 и 5 е равна на $1+2+3+4+6+7+8+9=40$. Броят на тези цифри е 8, но е ясно, че не съществува 8-цифрено число с исканато свойство, защото то със сигурност няма да се дели на 3, на 6 и на 9 (от признаците за делимост на 3 и 9). Заключаваме, че търсеното число е най-много със седем цифри. За да се дели търсеното число на 3 и на 6 (в случай, че си подсигурим да завършва на четна цифра), достатъчно е да се освободим от цифрата 1. Тогава сумата от оставащите цифри става равна на 39 и се дели на 3. Ако се откажем обаче от цифрата 4, вместо от 1, можем да си подсигурим делимост и на 9. За да се дели търсеното число на 8, достатъчно е (съгласно признака за делимост на 8) числото, образувано от последните му три цифри, да се дели на 8. За последни три цифри можем да вземем например 328. Сега лесно стигаме до 7-цифреното число 9 176 328, за което непосредствено се проверява, че се дели на 1, 2, 3, 6, 7, 8 и 9. С това задачата е решена, но ще отбележим, че намереното число не е единственият пример.

Схема на оценяване: **1 т.** за отхвърляне на нулата; **1 т.** за разсъждението в случай, че числото се дели на 5; общо **5 т.** за случая, когато числото не се дели на 5, от които **1 т.** за съображението $1+2+3+4+6+7+8+9=40$, **1 т.** за заключението, че търсеното число е най-много със седем цифри, **1 т.** за отхвърляне на цифрата 4 чрез съображенията за делимост на 6, **1 т.** за включване на признака за делимост на 8 и избор на последните три цифри на числото, **1 т.** за верен пример на 7-цифрено число.

Задачите са предложени, както следва:

зад. 5.1 – Диана Миланова, зад. 5.2 – Диана Миланова, зад. 5.3 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев