РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

Задача 4.1. Пресметнете стойността на числовия израз:

$$A=\left(27846:9+3801:7\right)-36\cdot 101.$$

Възможно ли е точно едно от участващите в израза A числа да се замени с друго така, че първоначалната стойност на израза да се увеличи с 5?

Решение: $A=\left(27846:9+3801:7\right)-36\cdot 101=\left(3094+543\right)-3636=3637-3636=1$.

Желаната замяна е възможна по един от следните два начина: или 27846 да се замени с 27891, или 3801 да се замени с 3836.

Схема на оценяване: Правилното извършване на деленията и умножението – по **1 т.**, общо **3 т.** За пресмятането на числовата стойност на израза – още **1 т.** За правилен отговор на въпроса в задачата (без обосновка) – **1 т.** и още **2 т.**, ако е показано как да стане промяната на стойността на израза (достатъчно е посочване на един начин).

Задача 4.2. Дължината и широчината на правоъгълник, измерени в сантиметри, са естествени числа. Обиколката на правоъгълника в сантиметри е двуцифрено число с цифра на единиците 0, а лицето на правоъгълника в квадратни сантиметри е двуцифрено число с цифра на десетиците 9.

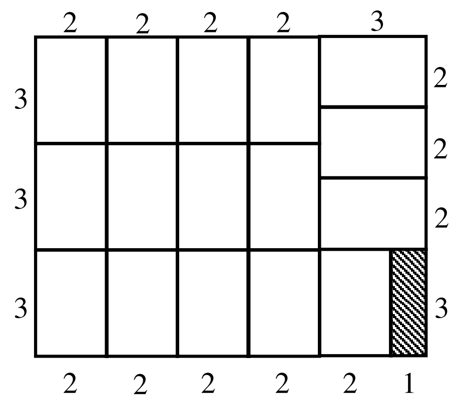
а) Да се намерят всички такива правоъгълници.

б) Лицето на правоъгълника е 99 *кв. см*. Колко най-много правоъгълника с размери 3 *см* и 2 *см* могат да бъдат разположени в дадения правоъгълник без застъпване и припокриване?

Решение: а) Можем да предполагаме, че широчината на търсените правоъгълници е не по-голяма от дължината. Да разгедаме правоъгълник с исканите свойства. Ако широчината на правоъгълника е по-голяма от 9 *см*, то лицето му ще е поне $10\cdot 10=100$ *кв. см*, което е невъзможно. Следователно широчината на правоъгълника е едноцифрено число. Тя не може да 1 *см*, защото тогава дължината трябва да е поне 90 *см* (заради лицето), но в такъв случай обиколката не може да е двуцифрено число. По същия начин проверяваме, че широчината не може да е 2 *см* – тогава дължината трябва да е поне 45 *см,* но обиколката става по-голяма от 90 *см* и няма как да е двуцифрено число, завършващо на 0. Ако дължината на правоъгълника е a *см,* а широчината му е b *см*, то за да завършва обиколката $P=2\cdot\left(a+b\right)$ на нула, трябва сборът $a+b$ да завършва на 5 или на 0. Ако широчината на правоъгълника е 3 *см*, то понеже $3\cdot 30=90$ и $3\cdot 33=99$, дължината му може да бъде 30, 31, 32 или 33 *см*. Но само дължина 32 *см* е такава, че $3+32=35$ завършва на 5. Така намираме един правоъгълник, който е решение на задачата. Той е с дължина 32 *см*, широчина 3 *см*, обиколка 70 *см* и лице 96 *кв. см*. По същия начин проверяваме останалите възможности за широчината на правоъгълника. Окончателно получаваме следните правоъгълници, които са решения на задачата:

Дължина	Широчина	Обиколка	Лице
32	3	70	96
13	7	40	91
12	8	40	96
11	9	40	99

б) Като използваме намереното в а), виждаме, че става въпрос за правоъгълника с дължина 11 *см* и широчина 9 *см*. Да отбележим, че измеренията на този правоъгълник могат да бъдат намерени и без да се използват резултатите от а). Понеже лицето на един “малък” правоъгълник е $3\cdot 2=6$ *кв. см* и $17\cdot 6=102>99$, то в дадения правоъгълник не могат да бъдат разположени повече от 16 “малки” правоъгълника. Ето пример на вариант за разположение на 16 “малки” правоъгълника:



Защрихованият правоъгълник остава непокрит.

<u>Схема на оценяване</u>: За а) – общо **4 т.**, по **1 т.** за всеки открит правоъгълник. Ако правоъгълниците са само посочени, без никаква обосновка, да се присъждат **2 т.** За б) – общо **3 т.**, от които **1 т.** за намиране броя на правоъгълниците и **2 т.**, ако е построен коректен пример на разположение на правоъгълниците.

Задача 4.3. Да се реши числовият ребус $abcd\cdot a=eeeed$, в който на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви отговарят различни цифри.

Решение: Цифрата a не може да бъде равна на 0, защото е първа цифра. Тя не може да е 1, защото тогава произведението $abcd\cdot a$ няма да бъде петцифрено. Да разгледаме последователно останалите възможности за цифрата a. Ако $a=2$, то произведението $abcd\cdot a$ ще бъде по-малко от $3000\cdot 2=6000$ и няма да е петцифрено. Следователно и този случай е невъзможен. Ако $a=3$, то произведението $abcd\cdot a$ ще бъде по-малко от $4000\cdot 3=12000$. Затова единствената възможност за цифрата e в този случай е $e=1$. При това произведението $d\cdot a=d\cdot 3$ трябва да завършва на d, което е възможно само ако $d=0$ или $d=5$. Проверката показва, че равенството $3705\cdot 3=11115$ е решение на ребуса. Ако $a=4$, то отново трябва $e=1$. Но това е невъзможно, защото $eeeed=1111d$, докато $4000\cdot 4=16000>1111d$. Нека $a=5$. Тъй като $abcd\cdot a$ е число между $5000\cdot 5=25000$ и $6000\cdot 5=30000$, за e получаваме единствената възможност $e=2$. Тогава $eeeed=2222d<25000=5000\cdot 5<abcd\cdot a$ и отново не получаваме решение. При $a=6$ произведението $abcd\cdot a$ ще се намира между 36000 и 42000. Затова сега $e=3$ или $e=4$. Но ако $e=3$, то $eeeed=3333d<36000$, а ако $e=4$, то $eeeed=4444d>42000$. Следователно и този случай е невъзможен. При $a=7$ произведението $abcd\cdot a$ ще се намира между $7000\cdot 7=49000$ и $8000\cdot 7=56000$ Затова $e=4$ или $e=5$ и понеже отново $eeeed$ ще е $4444d$ или $5555d$, за e остава само възможността $e=5$. Като отчетем, че трябва $d\cdot a$ да завършва на d, заключаваме, че $d=0$ или $d=5$. Тъй като вече $e=5$, остава $d=0$. Но делението $eeeed:a=55550:7$ е невъзможно. Отново не получаваме решение на ребуса. Нека $a=8$. Тогава $abcd\cdot a$ ще бъде между $8000\cdot 8=64000$ и $9000\cdot 8=72000$. Следователно $e=6$ или $e=7$. Възможността $e=7$ отпада, защото $7777d>72000$. Остава $e=6$. Отново от факта, че $d\cdot a$ трябва да завършва на d, определяме $d = 0$, при което делението $eeeed : a = 66660 : 8$ е невъзможно. Остана случаят $a = 9$. Сега произведението $abcd \cdot a$ се намира между $9000 \cdot 9 = 81000$ и 90000, откъдето $e = 8$. Както по-горе, намираме, че $d = 0$ или $d = 5$. Но деленията $eeeed : a = 88880 : 9$ и $eeeed : a = 88885 : 9$ са невъзможни.

Окончателно ребусът има единствено решение: $3705 \cdot 3 = 11115$.

Схема на оценяване: **2 т.**, ако са направени правилни разсъждения за ограничаване стойностите на коя да е от участващите цифри; още **3 т.**, ако са изчерпани всички възможни варианти за стойностите на цифрите (при частично разглеждане на случаите се присъждат **1 т.** или **2 т.** по усмотрение на областната комисия) и още **2 т.** за намиране на решението.

Задачите са предложени, както следва:

зад. 4.1 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев, зад. 4.2 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев, зад. 4.3 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев