Министерство на образованието, младежта и науката

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 13 март 2011 г.

Тема за 12. клас

Задача 4. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, като $\sphericalangle BAC < 90^\circ$, $\sphericalangle ABC \neq 90^\circ$ и точка M е среда на AC. Да се докаже, че $\sphericalangle BMD = 2\sphericalangle BAD$ тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $AB.CD = AD.BC$.

Задача 5. Дадени са естествени числа n и k, за които $n \geq 3$ и $1 \leq k \leq n-2$. В група от n човека има точно k двойки хора, които се познават. Да се докаже, че от тази група могат да се изберат $n-k+1$ човека, двама от които се познават, като всеки от двамата познати не познава никой от останалите $n-k-1$ от избраните.

Задача 6. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството на положителните реални числа. Да се докаже, че за всяка неконстанта функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ съществуват числа x, y и $z > 0$, за които е изпълнено неравенството

$$(f(x)+f(y)-2f(xy)).(f(x)+f(z)-2f(xz)) < 0.$$

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

math-bg.com