60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 12-13.03.2011 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 10.1 Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b, за които неравенството $2|x^2+ax+b|>1$ няма решения в интервала $[1,3]$.

Решение. Да означим $f(x)=x^2+ax+b$. Първо ще докажем, че абсцисата на върха на параболата $f(x)$ е в интервала $[1,3]$.

Ако $-\frac{a}{2}<1 \iff a>-2$, условието е еквивалентно на $2f(1)\geq -1$ и $2f(3)\leq 1$, откъдето получаваме $2+2a+2b\geq -1$ и $18+6a+2b\leq 1$. Следователно $-2a-3\leq 2b\leq -6a-17$, откъдето $-2a-3\leq -6a-17 \iff a\leq -\frac{7}{2}$, което противоречи на $a>-2$. Аналогично се вижда, че неравенството $-\frac{a}{2}>3$ е невъзможно – дава $a<-6$ и $a\geq -\frac{9}{2}$.

При $-\frac{a}{2}\in[1,3]$ условието е еквивалентно на $2f(1)\leq 1$, $2f(3)\leq 1$ и $2f(-\frac{a}{2})\geq -1$, съответно $1+a+b\leq \frac{1}{2}$, $9+3a+b\leq\frac{1}{2}$ и $b-\frac{a^2}{4}\geq -\frac{1}{2}$. От първото и третото получаваме $\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}\leq b\leq -a-\frac{1}{2}$ и следователно $a^2+4a\leq 0 \iff a\in[-4,0]$. Аналогично от второто и третото неравенства имаме $\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}\leq b\leq -3a-\frac{17}{2}$ или $a^2+12a+32\leq 0 \iff a\in[-8,-4]$. Следователно $a=-4$ е единствената възможност, а тогава за b получаваме (от кое да е от двете двойни неравенства по-горе) $b=\frac{7}{2}$.

Окончателно, $a=-4$ и $b=\frac{7}{2}$.

Инструкции за оценяване: 2 т. за отхвърляне на възможността $-\frac{a}{2}\notin[1,3]$, 5 т. за случая $-\frac{a}{2}\in[1,3]$, като от тях 2 т. за получаване на $a^2+4a\leq 0$, 2 т. за получаване на $a^2+12a+32\leq 0$ и 1 т. за намиране на b.

Задача 10.2. Виж задача 9.2.

Задача 9.2. Да се намерят всички прости числа p, за които съществуват взаимно прости естествени числа a и b, такива, че

$$p(a^2+ab+b^2)=1501(a+b).$$

Решение. Ако допуснем, че има просто число r, делящо $a+b$ и a^2+ab+b^2, то от $b\equiv -a \pmod r$ и $0\equiv a^2+ab+b^2\equiv a^2-a^2+a^2=a^2 \pmod r$ следва, че $r|a$ и $r|b$, което противоречи на $(a,b)=1$. Следователно $(a+b,a^2+ab+b^2)=1$. Тогава, тъй като $a+b|p(a^2+ab+b^2)$, то $a+b|p$. Но $a+b>1$, така че $a+b=p$ и $a^2+ab+b^2=1501$.

От $1501=(a+b)^2-ab=p^2-ab$ получаваме $p^2>1501$ и оттук $p\geq 39$. Освен това a и b са корени на квадратното уравнение (1) $x^2-px+p^2-1501=0$ и трябва дискриминантата D на това уравнение да е неотрицателна. От $D=6004-3p^2\geq 0$ получаваме $p^2\leq 2001$ и значи $p\leq 44$.

Понеже p е просто число, остават възможностите $p=41$ и $p=43$. Сега пресмятаме, че при $p=41$ корените на (1) са 5 и 36 (взаимно прости естествени числа), а при $p=43$ те не са цели числа. Окончателно, $p=41$.

Инструкции за оценяване. 3 т. за обосновано получаване на $a+b=p$ и $a^2+ab+b^2=1501$, 3 т. за достигане да $39\leq p\leq 44$, 1 т. за окончателния отговор.

Задача 10.3. Виж задача 9.3.

Задача 9.3. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който H_a е ортоцентър на $\triangle BCD$, H_b е ортоцентър на $\triangle CDA$, H_c е ортоцентър на $\triangle DAB$ и H_d е ортоцентър на $\triangle ABC$. Да се докаже, че ако правите AC и H_aH_c са успоредни, но не съвпадат, то правите BD и H_bH_d са успоредни.

Решение. Имаме $AH_c \perp BD$ и $CH_a \perp BD$, откъдето $AH_c \| CH_a$ и следователно четириъгълникът AH_cCH_a е успоредник.

Да построим точката P така, че векторите $\overrightarrow{AH_c}$, $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{CH_a}$ са равни. Тогава $PB \| AH_c \Rightarrow \sphericalangle PBD = 90^\circ$ и $PA \| BH_c \Rightarrow \sphericalangle PAD = 90^\circ$. Оттук, точката A лежи на описаната окръжност на $\triangle PBD$. Аналогично, точката C лежи на същата описана окръжност и четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност.

Да построим точката Q, диаметрално противоположна на C в тази окръжност. По обратния път на горното разсъждение установяваме, че QAH_dB е успоредник, $QA = BH_d$, и аналогично $QA = DH_b$, откъдето $BH_d = DH_b$, фигурата BH_dH_bD също е успоредник, и $BD \| H_bH_d$, както се искаше.

Инструкции за оценяване. 1 т. за доказателство, че AH_cCH_a е успоредник; 4 т. за доказателство, че четириъгълникът $ABCD$ е вписан, 2 т. за довършване.

Задача 10.4. Да се реши неравенството

$$\sqrt{1 - 3x - \sqrt{12 - 8x}} > \sqrt{-x^2 - 3x + 4}.$$

Решение. Допустимите стойности за x са всички решения на системата

$$\begin{aligned} -x^2 - 3x + 4 &\geq 0 \\ 12 - 8x &\geq 0 \\ 1 - 3x - \sqrt{12 - 8x} &\geq 0. \end{aligned}$$

Оттук получаваме $x \in [-4, -11/9]$.

Повдигаме двете страни на квадрат и получаваме

$$x^2 - 3 > \sqrt{12 - 8x}.$$

Това неравенство не е изпълнено за $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. За всички останали стойности на x повдигаме още веднъж на квадрат и достигаме до

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^2(x^2 + 2x - 3) > 0.$$

Тъй като $(x-1)^2 > 0$ за всяко допустимо x, горното неравенство се свежда до $x^2 + 2x - 3 > 0$, откъдето $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Окончателно решения на неравенството са всички $x \in [-4, -3)$.

Инструкции за оценяване: 2 т. за определяне на дефиниционната област на x; 2 т. за достигане на неравенство от четвърта степен; 2 т. за разлагане на полинома от четвърта степен и решаване на неравенството; 1 т. за намиране на окончателните стойности на x, които са решения на задачата.

Задача 10.5. Виж задача 9.5.

Задача 9.5. Нека T е множеството от всички триъгълници ABC с радиуси r и r_a съответно на вписаната окръжност и на външновписаната окръжност срещу върха A, където r и r_a са фиксирани положителни числа. Да се докаже, че:

а) всички триъгълници в T имат една и съща дължина на височината от върха A;

б) измежду всички триъгълници в T най-малко лице има този, за който $AB = AC$.

Решение. а) Нека I и I_a са съответно центровете на вписаната и външновписаната окръжност, а $AH = h_a$ е разстоянието от A до BC, $H \in BC$. Ако $IP \perp BC$, $P \in BC$, и $I_aQ \perp BC$, $Q \in BC$, имаме $\frac{AI}{AI_a} = \frac{r}{r_a}$. Аналогично, ако $IR \perp AH$, $R \in AH$, и $I_aS \perp AH$, $S \in AH$, то $\frac{AI}{AI_a} = \frac{h_a - r}{h_a + r_a}$. Оттук се вижда, че $h_a = \frac{2rr_a}{r_a - r}$ може да бъде определено еднозначно по r и r_a, и следователно всички триъгълници от T имат равни височини през A.

б) От а) следва, че най-малко лице ще има този от триъгълниците в T, в който дължината на страната BC е минимална. Лесно се вижда, че четириъгълникът BI_aCI е вписан в окръжност k с диаметър II_a, като $II_a \geq r + r_a$ и равенство се достига, когато вписаната и външновписаната окръжност се допират. В същия случай мярката на $\sphericalangle BAC$ е максимална, а BC е хорда в k срещу ъгъл $90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle BAC$.

Получихме, че лицето на $\triangle ABC$ е минимално точно тогава, когато вписаната и външновписаната окръжност се допират. Последното е възможно само тогава, когато $AB = AC$.

Инструкции за оценяване. 2 т. за а); 2 т. за въвеждане на вписания четириъгълник BI_aCI с цел оценяване на дължината на BC; 3 т. за довършване.

Задача 10.6. Виж задача 9.6.

Задача 9.6. Една редица от естествени числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ се нарича n-добра, ако $x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq n$ и $x_i - i$ се дели на 3 за всяко $i = 1, \ldots, k$. Нека a_n е броят на n-добрите редици за фиксирано естествено число n. Да се докаже, че числото $a_{n+8} - a_n$ се дели на 3.

Решение. Ако $1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ е n-добра редица, то $x_2 - 1, x_3 - 1, \ldots, x_k - 1$ е $(n-1)$-добра редица. Вземайки пред вид и редицата с единствен член $x_1 = 1$ получаваме, че броят на n-добрите редици, които започват с 1, е $a_{n-1} + 1$. Ако $x_1, x_2, \ldots, x_k$ е n-добра редица с $x_1 \geq 4$, то $x_1 - 3, x_2 - 3, \ldots, x_k - 3$ е $(n-3)$-добра редица. Оттук следва, че броят на n-добрите редици, незапочващи с 1, е a_{n-3}.

Горните разсъждения показват, че $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 1$. Пресмятаме първите няколко стойности на a_n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	1	2	3	5	8	12	18	27	40	59	87
$a_n \pmod 3$	1	2	0	2	2	0	0	0	1	2	0

Сега твърдението лесно следва по индукция. Базата за индукцията следва от таблицата. Нека $n \geq 4$ и $a_{k+8} \equiv a_k \pmod 3$ за всяко $k \leq n$. Тогава

$$a_{n+9} = a_{n+8} + a_{n+6} + 1 \equiv a_n + a_{n-2} + 1 = a_{n+1} \pmod 3,$$

което завършва доказателството.

Инструкции за оценяване. 4 т. за намиране на рекурентна връзка за a_n; 1 т. за пресмятане на първите членове на редицата; 2 т. за довършване на доказателството по индукция.

Автори на задачите:
Иван Ланджев – 9.6(10.6), 10.4;
Петър Бойваленков – 9.4, 10.1; Николай Белухов – 9.3(10.3), 9.5(10.5); Керопе Чакърян – 9.1, 9.2 (10.2).