

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

Русе, 3-5 февруари, 2006 г.

Тема за 8 клас

8.1. Две коли се движат една срещу друга от София и Пловдив. В 8 h сутринта, преди да са се срещнали, те се намират на разстояние 88 km една от друга, а в 8 h 54 min, след като са се разминали – са на разстояние 110 km една от друга.

а) В колко часа са се срещнали колите?

б) С каква скорост се движат колите, ако автомобилът, тръгнал от Пловдив, до срещата е изминал с 8 километра повече от автомобила, тръгнал от София.

8.2. Нека $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2005)(x-2006)$.

а) Докажете, че за всяко цяло число n е в сила неравенството $P(n) \geq 0$.

б) Намерете най-малкото цяло число n , за което неравенството $P(x) > 0$ е изпълнено за всяко $x \geq n$.

8.3. Даден е квадрат $ABCD$ със страна 3. Върху страните му AB , BC , CD и DA са взети точки K , L , M и N такива, че $AK = BL = CM = DN = 1$. Нека $AL \cap BM = A'$, $BM \cap CN = B'$, $CN \cap DK = C'$ и $DK \cap AL = D'$.

а) Докажете, че $A'B'C'D'$ е квадрат.

б) Намерете лицето на $A'B'C'D'$.

8.4. Около кръгла маса са седнали 2006 играчи. Всеки от тях има пред себе си някакво количество жетони, като се допуска да има и „фалирвали“ играчи, т.е. без нито един жетон.

В даден момент се оказало, че всеки от играчите може да заяви, че той заедно със съседите си отляво и отдясно имат общо нечетен брой жетони. Докажете, че в този момент на масата няма „фалирвали“ играчи, т.е. пред всеки играч има поне по един жетон.

Време за работа – 4 часа.

Журито Ви желае успешна работа!