ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ – РУСЕ, 2006 г.

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

8. КЛАС

8.1. Две коли се движат една срещу друга от София и Пловдив. В 8 h сутринта, преди да са се срещнали, те се намират на разстояние 88 km една от друга, а в 8 h 54 min, след като са се разминали – са на разстояние 110 km една от друга.

а) В колко часа̀ са се срещнали колите?

б) С каква скорост се движат колите, ако автомобилът, тръгнал от Пловдив, до срещата е изминал с 8 километра повече от автомобила, тръгнал от София.

Р е ш е н и е. а) Ако означим с v_1 скоростта на колата, тръгнала от София, с v_2 скоростта на колата, тръгнала от Пловдив, и с t времето в часове до срещата, имаме $tv_1+tv_2=88$ или $t\left(v_1+v_2\right)=88$. След това те се движат още $0,9-t$ ча̀са, докато се отдалечат на 110 km, т.е. $\left(0,9-t\right)\left(v_1+v_2\right)=110$. Така намираме $\frac{0,9-t}{t}=\frac{10}{8}$ или $t=\frac{2}{5}$ h. Следователно колите са се срещнали в 8 h 24 min.

б) От уравненията $\frac{2}{5}v_1+\frac{2}{5}v_2=88$ и $\frac{2}{5}v_2-8=\frac{2}{5}v_1$ намираме $\frac{4}{5}v_2=96$, откъдето $v_2=120$ km/h. За v_1 намираме $v_1=100$ km/h.

8.2. Нека $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2005)(x-2006)$.

а) Докажете, че за всяко цяло число n е в сила неравенството $P(n)\geq 0$.

б) Намерете най-малкото цяло число n, за което неравенството $P(x)>0$ е изпълнено за всяко $x\geq n$.

Р е ш е н и е. а) Ако $n=1, 2, 3, ..., 2005$ или 2006, то $P(n)=0$. Ако $n>2006$, то всяка от разликите $n-1,\ n-2,\ ...,\ n-2006$ е положителна и $P(n)>0$. Ако $n\leq 0$, то всяка от разликите $n-1,\ n-2,\ ...,\ n-2006$ е отрицателна. Но $P(n)$ е произведение от тези отрицателни разлики, които са четен брой. Следователно и в този случай $P(n)>0$.

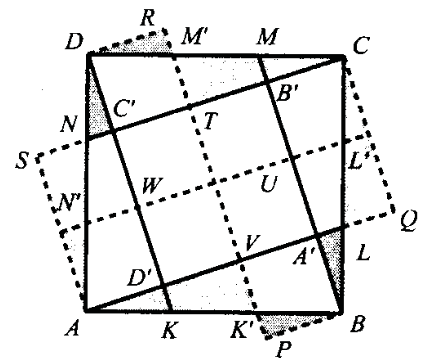
б) Ако $n\leq 2006$, тъй като $P(2006)=0$, то неравенството $P(x)>0$ не е изпълнено за всяко x. Очевидно, ако $n=2007$, то както в а) получаваме, че $P(x)>0$ за всяко $x\geq n$.

8.3. Даден е квадрат $ABCD$ със страна 3. Върху страните му AB, BC, CD и DA са взети точки K, L, M и N такива, че $AK=BL=CM=DN=1$. Нека $AL\cap BM=A'$, $BM\cap CN=B'$, $CN\cap DK=C'$ и $DK\cap AL=D'$.

а) Докажете, че $A'B'C'D'$ е квадрат.

б) Намерете лицето на $A'B'C'D'$.

б) Нека точките K', L', M' и N' върху AB, BC, CD и DA са такива, че $AK' = BL' = DN' = CM' = 2$ и $CN \cap M'K' = T$, $M'K' \cap AL = V$, $BL \cap N'L' = U$ и $DK \cap L'N' = W$.



Нека правата AL и правата през C, успоредна на BM, се пресичат в точка Q. Тогава $\triangle CQL \cong \triangle CM'T$ ($CL = CM'$, $\sphericalangle CQL = \sphericalangle CTM'$, $\sphericalangle LCQ = \sphericalangle TCM'$). Аналогично имаме, че $\triangle ASN \cong \triangle AK'V$. По същия начин, като построим BP и DR успоредни на AL, получаваме, че $\triangle BK'P \cong \triangle BA'L$ и $\triangle DRM' \cong \triangle DC'N$.

Тогава фигурата $AVPBA'QCTRDC'S$, съставена от 10 еднакви квадрата, е равнолицева на квадрата $ABCD$. Но лицето на $A'B'C'D'$ е $\dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$ от лицето ѝ. Следователно лицето на четириъгълника $A'B'C'D'$ е $\dfrac{18}{5}$.

8.4. Около кръгла маса са седнали 2006 играчи. Всеки от тях има пред себе си някакво количество жетони, като се допуска да има и „фалирали" играчи, т.е. без нито един жетон. В даден момент се оказало, че всеки от играчите може да заяви, че той заедно със съседите си отляво и отдясно имат общо нечетен брой жетони. Докажете, че в този момент на масата няма „фалирали" играчи, т.е. пред всеки играч има поне по един жетон.

Р е ш е н и е. Нека номерираме играчите по кръга с числата 1, 2, 3, ..., 2006, да кажем, по посока на часовниковата стрелка. Ще докажем, че в дадения момент всеки от играчите има нечетен брой жетони, откъдето твърдението ще следва веднага. Да допуснем, че има поне един играч с четен брой жетони. За определеност нека това е играч № 1. Тогава двамата му съседи ще имат жетони с различна четност и пак за определеност да приемем, че № 2 е с четен брой жетони, а № 2006 – с нечетен. Но тогава играчът № 3 трябва да има нечетен брой жетони, а играчът № 4 – четен. Това разсъждение показва, че всеки играч с номер 1, 2, 4, 5, ... ще има четен брой жетони, а всеки играч с номер 3, 6, 9, ..., т.е. делящите се на 3, – нечетен брой жетони. Но 2006 не се дели на 3. Следователно допускането е невярно.