КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

7. КЛАС

7.1. Служители на застрахователна компания за една седмица сключили по 34 застраховки всеки. През следващата седмица 5 от тях били пренасочени в друг отдел. Останалите ускорили работата си и в края на седмицата изчислили, че всеки от тях е сключил еднакъв брой застраховки, които са с между 10% и 20% повече от първата седмица. Въпреки това общият брой бил с 8 по-малко.

а) Колко служители работили през първата седмица?

б) Колко застраховки били сключвани през втората седмица?

Р е ш е н и е. Тъй като $34.1{,}1 = 37{,}4$ и $34.1{,}2 = 40{,}8$, увеличеният брой застраховки е 38, 39 или 40.

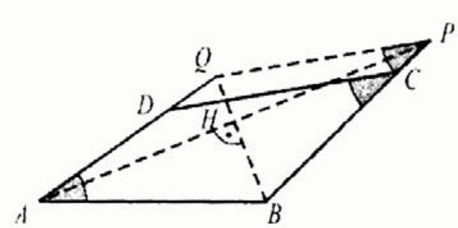
Ако увеличеният брой застраховки е 38, за намиране на броя служители x съставяме уравнението $34.x - 8 = 38(x-5)$, което се свежда до $4x = 182$. Това уравнение няма за решение естествено число.

Ако увеличеният брой застраховки е 39, за намиране на броя служители x съставяме уравнението $34.x - 8 = 39(x-5)$, което се свежда до $5x = 187$. Това уравнение няма решение в множеството на естествените числа.

Ако увеличеният брой застраховки е 40, за намиране на броя служители x съставяме уравнението $34.x - 8 = 40(x-5)$, което се свежда до $6x = 192$. Това уравнение има решение $x = 32$, което е и търсеният брой служители. През втората седмица били сключени $34.32 - 8 = 1080$ застраховки.

7.2. В четириъгълника $ABCD$ $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$. Ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$ пресича правата AD в точка Q. Права през върха A, перпендикулярна на ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$, пресича правата BC в точка P. Докажете, че правите PQ и CD са успоредни.

Р е ш е н и е. Тъй като $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle CBQ$, $\sphericalangle AHB = \sphericalangle CHB = 90^\circ$ и BH – обща страна, то $\Delta ABH \cong \Delta CBH$ (II пр.). Оттук следва, че $AB = PB$. $\Delta ABQ \cong \Delta PBQ$ (I пр.) и $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle BPQ$. Тъй като $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$, то $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BPQ$. Следователно $CD \parallel PQ$.



7.3. Нека $N = n^3 - 3n^2 + 2006n$, където n е естествено число.

а) Докажете, че числото N се дели на 6.

б) Намерете най-малкото n, за което числото N се дели на 49.

Р е ш е н и е. а) Да забележим, че $n^3 - 3n^2 + 2006n = n^3 - 3n^2 + 2n + 2004n$. Сега остава да докажем, че числата $n^3 - 3n^2 + 2n$ се делят на 6. За целта разлагаме израза $n^3 - 3n^2 + 2n$ на множители и последователно получаваме

$$n^3-3n^2+2n=n\left(n^2-3n+2\right)=n\left(n^2-n-2n+2\right)=n\left[n(n-1)-2(n-1)\right]=$$
$$=n(n-1)(n-2).$$

Тъй като произведението на три последователни естествени числа се дели на 6, то и даденият израз се дели на 6 за всяко естествено число n.

б) Очевидно за $n=49$ числото $N=n\left(n^2-3n+2006\right)$ се дели на 49. Числото $\frac{N}{n}$ представяме във вида $\frac{N}{n}=n^2-3n-3+2009=n^2-3n-3+49.41$. Сега вече се интересуваме от числото $M=n^2-3n-3=\frac{1}{4}\left((2n-3)^2-21\right)$. Ако M се дели на 7, то $(2n-3)^2$ се дели на 7, а значи и на 49. Тъй като 21 не се дели на 49, то и M не се дели на 49. Ако n се дели на 7, то n^2-3n+3 не се дели на 7 и N не се дели на 49. Следователно $n=49$ е търсеното решение.

7.4. На един остров живеят 240 хамелеона – червени, сини и жълти. Когато два хамелеона с различен цвят се срещнат, те едновременно си сменят цветовете в третия цвят (например – червен и син стават жълти). На 01.01.2006 г. на острова имало 100 червени, 50 сини и 90 жълти хамелеона. Може ли след известно време всички хамелеони да бъдат с един и същи цвят?

Р е ш е н и е. Да означим броя на хамелеоните в даден момент с (Ч, С, Ж). Ако всички хамелеони са с един и същи цвят, то имаме една от възможностите (240, 0, 0), (0, 240, 0) или (0, 0, 240). Ще покажем, че във всеки момент разликата Ч – С (Ч – Ж или Ж – С) дава един същи остатък при делене на три. Наистина при среща на хамелеони с различни цветове имаме:

I. Ч + С ⇒ Ч – 1, С – 1, Ж + 2 ⇒ (Ч – 1) – (С – 1) = Ч – С.

II. Ч + Ж ⇒ Ч – 1, Ж – 1, С + 2 ⇒ (Ч – 1) – (С + 2) = Ч – С – 3.

III. С + Ж ⇒ Ч + 2, Ж – 1, С – 2 ⇒ (Ч + 2) – (С – 1) = Ч – С + 3.

Тъй като започваме от (100, 50, 90), то Ч – С = 100 – 50 = 50 дава остатък 2 при делене на 3. Но 240 или 0 дава остатък 0 при делене на 3. Следователно, не е възможно всички хамелеони да станат едноцветни.