ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ – РУСЕ, 2006 г.

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

6. КЛАС

6.1. Рибари хванали няколко риби, повече от 30, но по-малко от 100, като 48% от рибите били шарани. Пет от рибите били много малки и ги пуснали отново в реката, след което се оказало, че 50% от останалите риби са шарани.

а) Колко риби са уловили рибарите?

б) Колко шаранчета е имало сред пуснатите в реката рибки?

Р е ш е н и е. Нека n е броят на уловените риби. Тогава шараните са 48% от n, т.е. броят на шараните е $12.\frac{n}{25}$. Следователно общият брой n на рибите се дели на 25 и понеже n е между 30 и 100, то $n = 50$ или $n = 75$. След като пуснали 5 рибки в реката, броят станал 45 или 70. Броят на останалите риби трябва да е четен, понеже половината са шарани, т. е. останали са 70 риби. Следователно $n = 75$. Шараните са 36 (48%) и сред пуснатите риби е имало 1 шаран.

6.2. Да се докаже, че ако числото 7 дели число от вида $\overline{abab}$, то 7 дели и числото bba.

Р е ш е н и е. Имаме $abab = 1010a + 101b = 7(144a + 14b) + 2a + 3b$. Следователно 7 дели $2a + 3b$. Но $bba = 110b + a = 7.15b + a + 5b$. Тъй като $2(a + 5b) - (2a + 3b) = 7b$, то 7 дели bba, с което задачата е решена.

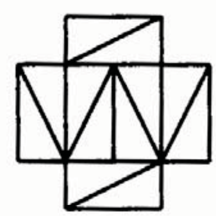
6.3. От квадрат със страна 8 cm са отрязани четирите ъглови квадратчета със страна 2 cm. Може ли получената фигура да се разреже на:

а) равнолицеви триъгълници;

б) 12 равнолицеви триъгълника;

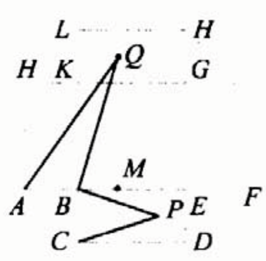
в) по-малко от 12 равнолицеви триъгълника?

Р е ш е н и е. а) Може. Например, като разделим фигурата на квадратчета със страна 2 и всяко квадратче разделим с диагонал на два равнолицеви триъгълника.



б) Може. Както е показано на чертежа фигурата е разделена на 12 триъгълника с лице 4 cm^2.

в) Не може. Да допуснем, че такова разрязване е възможно. Тъй като лицето на фигурата е 48 cm^2, то триъгълниците трябва да са с лица, по-големи от 4 cm^2. За отсечката $AB = 2$ cm имаме следните възможности:



1) AB е част от страна на триъгълник – AM, където M е точка от отсечката BF.

2) Има триъгълник със страна AB или част от AB.

1) Тогава $BC = 2$ cm ще бъде страна на триъгълник, на който третият връх P е в правоъгълника $BCDE$. Но лицето на $BCDE$ е 8 cm^2 и лицето на BCP ще бъде по-малко или равно на 4 cm^2, което противоречи на допускането.

2) Тогава височината на триъгълника ABQ към страната AB трябва да е по-голяма от 4 cm, т.е. върхът Q е в правоъгълника $GHLK$. Но тогава триъгълникът със страна HK ще бъде с лице по-малко от 4 cm^2, което отново е противоречие.

6.4. По окръжност са написани n естествени числа така, че разликата на всеки две съседни е равна на 1. Ако някое от тези числа е по-голямо от двете си съседни, ще го наричаме „голямо“. Ако някое от тези числа е по-малко от двете си съседни, ще го наричаме „малко“. Сборът на „големите“ числа е M, а сборът на „малките“ числа е m. Докажете, че $n = 2(M - m)$.

Р е ш е н и е. Групираме съседните числа по двойки и получаваме n на брой двойки от съседни числа. Във всяка двойка от по-голямото число изваждаме по-малкото – резултатът винаги е 1. Събираме всички такива разлики и получаваме n. От друга страна, всяко „голямо“ число се появява в две такива разлики със знак „+“ и всяко „малко“ число – също в две разлики, но със знак „–“. Числата, които не са нито „големи“, нито „малки“, се появяват също в две разлики, но в едната са със знак „+“, а в другата – със знак „–“. Следователно $n = 2M - 2m$.