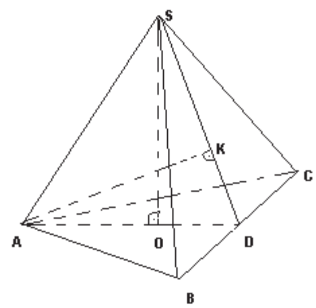
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА-12.02.2011 г.
Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване-XII клас



Зад.1 Нека AB=BC=AC=$a \Rightarrow h_a = AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **(1 точка)**.

$V = \dfrac{1}{3}.h.S_{ABC} \Rightarrow 18\sqrt{3} = \dfrac{1}{3}.6.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = 6$ **(1 точка)**.

$OD = \dfrac{1}{3}.AD = \dfrac{1}{3}.\dfrac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{6^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{39}$

(1 точка). Следователно $S = \dfrac{pk}{2} = \dfrac{3.6.\sqrt{39}}{2} = 9\sqrt{39}$ *кв.ед.*,

$S_1 = S + S_{ABC} = 9\sqrt{39} + \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{39} + 18\sqrt{3} = 9.(\sqrt{39} + \sqrt{3}) = 9\sqrt{3}\left(\sqrt{13} + 1\right)$ *кв.ед.* **(2 точки).**

Ако AK⊥SD, то търсеното разстояние от върха A до стената BSD е дължината на AK.

От $S_{ADS} = \dfrac{AD.SO}{2} = \dfrac{SB.AK}{2} \Rightarrow 3\sqrt{3}.6 = \sqrt{39}.AK \Rightarrow AK = \dfrac{18}{\sqrt{13}} = \dfrac{18\sqrt{13}}{13}$ **(2 точки).**

Зад.2 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 3 =$
$= (x-1)(x-4)(x-2)(x-3) + 3 = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + 3$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

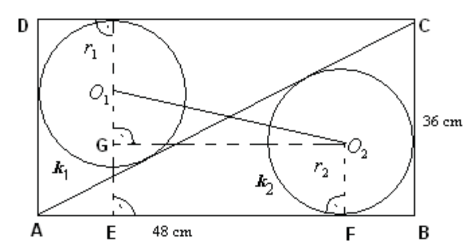
Полагаме $x^2 - 5x = z \Rightarrow f(x) = \varphi(z) = (z+4)(z+6) + 3 = z^2 + 10z + 27$ и $z \in (-\dfrac{25}{4}; +\infty)$ **(2 точки)**.

$\varphi(z) = z^2 + 10z + 27 = (z+5)^2 + 2 \Rightarrow \min_{z \in (-\frac{25}{4}, \infty)} \varphi(z) = \varphi(-5) = 2, \varphi(z) \geq 2$ *за* $\forall z$ **(2 точки)**

$\Rightarrow x^2 - 5x = -5 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}, \min_{x \in (-\infty, \infty)} f(x) = f(\dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}) = 2$, f(x) няма най-голяма стойност.

(1 точка). $\cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x = \dfrac{3}{4}.n \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$ **(2 точки)**

Зад.3. По Питагорова теорема от правоъгълния ΔACD намираме



$AC = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60cm$ **(1 точка)**.

Тъй като $AC + 2r_1 = AD + DC$, то

$r_1 = \dfrac{AD + DC - AC}{2} = \dfrac{36 + 48 - 60}{2} = 12cm$ **(1 точка)**.

Нека $O_1E \perp AB, O_2F \perp AB$ и $O_2G \perp O_1E$ **(2 точки)**.

Определяме $O_1E = AD - r_1 = 36 - 12 = 24cm$ **(0,5 точки)** и

$O_2F = r_2 = r_1 = 12cm$ **(0,5 точки)**.

В правоъгълния ΔO_1GO_2 намираме $O_2G = EF = AB - r_1 - r_2 = 48 - 2.12 = 24cm$ **(0,5 точки),**

$O_1G = O_1E - GE = O_1E - O_2F = 24 - 12 = 12cm$ **(0,5 точки)** и

$O_1O_2{}^2 = O_1G^2 + O_2G^2 = 12^2 + 24^2 = 12^2 + 4.12^2 = 5.12^2$, откъдето $O_1O_2 = 12\sqrt{5}cm$ **(1 точка)**.