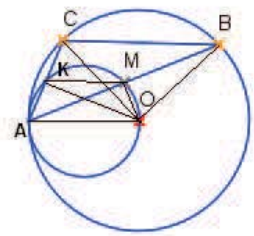
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. “Св.С.Врачански” №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

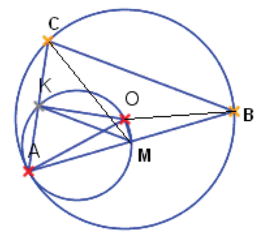
Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

XI клас

Зад.1 От условието имаме $a_1\left(1+q^2\right)=\dfrac{37}{8}$ **(1точка)** и $a_1q^4=162$ **(1точка)**. След почленно разделяне на двете уравнения намираме $\dfrac{1+q^2}{q^4}=\dfrac{37}{6^4}$ **(1точка)**. След полагане на $t=q^2\geq 0$, получаваме квадратното уравнение $37t^2-6^4t-6^4=0$ **(1точка)**, което има само един неотрицателен корен $t=36$ **(2точка)**$\Rightarrow q=\pm 6$ **(1точка)**.



Зад.2 $\angle AOM=45^0 \Rightarrow \angle ACB=45^0$ или $\angle ACB=135^0$ **(2 точки)**
От ОМ- симетрала на АВ**(1 точка)**
$\Rightarrow$ОК е симетрала на АС$\Rightarrow AC=2.AK=2.3=6$**(1 точка)**
МК-средна отсечка$\Rightarrow BC=2.MK=2.4=8$ **(1 точка).**
От косинусова теорема за АВ намираме
$AB^2=36+64-2.6.8.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow AB=\sqrt{100-48\sqrt{2}}$ **(1 точка)** или
$AB^2=36+64+2.6.8.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow AB=\sqrt{100+48\sqrt{2}}$ **(1 точка).**



Зад.3 а) $a_2=a_1{}^2-3a_1+4=3^2-3.3+4=4$,
$a_3=a_2{}^2-3a_2+4=4^2-3.4+4=8$, $a_4=a_3{}^2-3a_3+4=8^2-3.8+4=44$
(1,5 точки)
б) $a_{n+1}=a_n{}^2-3a_n+4 \Leftrightarrow 1808=a_n{}^2-3a_n+4 \Rightarrow a_n{}^2-3a_n-1804=0$

Но $a_{n+1}=a_n{}^2-3a_n+4=\left(a_n-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\geq 0 \Rightarrow a_n=44 \Rightarrow a_n=a_4 \Rightarrow n=4 \Rightarrow n+1=5$,
т.е. числото 1808 е пети член в редицата**(2 точки)**

в) $a_{n+1}-a_n=(a_n{}^2-3a_n+4)-a_n=\left(a_n-2\right)^2\geq 0$ $\Rightarrow$редицата е мотонно растяща**(1,5 точки)**

Ще докажем по индукция, че $a_n\geq n+2 \text{ за } \forall n=1,2,3,....$.
Неравенството е вярно при n=1.
Допускаме, че то е вярно при $n=k\geq 1$, т.е. $a_k\geq k+2$. От $k\geq 1 \Rightarrow k^2\geq 1$.
Ще докажем твърдението за $n=k+1$. От условието и допускането следва
$a_{k+1}=a_k\left(a_k-3\right)+4\geq\left(k+2\right)\left(k-1\right)+4=k^2+k+2\geq 1+k+2=k+3$.
Следователно $a_n\geq n+2 \text{ за } \forall n=1,2,3,...$, т.е. редицата е неограничена отгоре**(2 точки)**