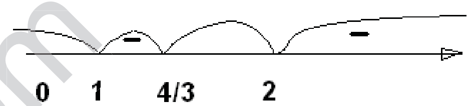
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. “Св.С.Врачански” №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.
Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

X клас

Зад.1 $\dfrac{1}{1-y} < \dfrac{1}{\dfrac{y}{2}-1} \Leftrightarrow \dfrac{3y-4}{(1-y)(y-2)} < 0$ и $y \neq 1;\ y \neq 2$



$\Rightarrow 1 < y < \dfrac{4}{3}$ *или* $y > 2 \Rightarrow y \in \left(1; \dfrac{4}{3}\right) \cup (2;+\infty)$ **(4 точки)**.

От $1 < y < \dfrac{4}{3}$ *или* $y > 2 \Rightarrow 1 < 2^x < \dfrac{4}{3}$ или $2^x > 2^1 \Rightarrow 0 < x < \log_2 \dfrac{4}{3}$ или $x > 1 \Rightarrow$

$x \in \left(0; \log_2 \dfrac{4}{3}\right) \cup (1;+\infty)$ **(3 точки)**.

Зад.2 а) Ако $D \geq 0$, то уравнението $f(x) = 0$ има реални корени**(0,5 точки)**.

От $D = k^2 + 8k + 16 - 4(k-1)(2k+5) = -7k^2 - 4k + 36 \geq 0 \Rightarrow k \in \left[-\dfrac{18}{7}; 2\right]$ **(1 точка)**.

От $f(x) = (k-1)x^2 - (k+4)x + 2k + 5$-квадратна функция

$\Rightarrow k \neq 1 \Rightarrow k \in \left[-\dfrac{18}{7}; 1\right) \cup (1;2]$ **(0,5точки).**

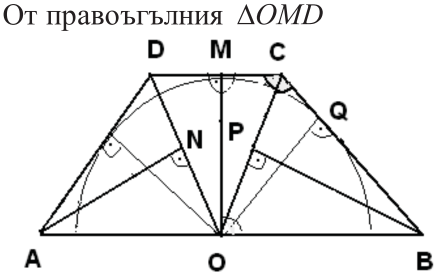
б) Ако D < 0 и a > 0, то $f(x) > 0$ за всяко x **(0,5 точки)**.

$\left|\begin{array}{l} a > 0 \\ D < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} k-1 > 0 \\ 7k^2 + 4k - 36 < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} k > 1 \\ k \in \left(-\infty; -\dfrac{18}{7}\right) \cup (2;+\infty) \end{array}\right. \Rightarrow k \in (2;+\infty)$ **(2 точки)**

в) $k = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}\right) = 2$ **(2 точки)**

$\Rightarrow f(x) = (k-1)x^2 - (k+4)x + 2k + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ **(0,5 точки)**.

Зад.3 Нека $OM \perp CD$, $BP \perp OC$ и $AN \perp OD$. От правоъгълния ΔOMC следва $MC^2 = OC^2 - OM^2 = 13^2 - 12^2 = 25cm$, откъдето $MC = 5cm$ **(1 точка)**. От правоъгълния ΔOMD следва $MD^2 = OD^2 - OM^2 = 15^2 - 12^2 = 81cm$, откъдето $MD = 9cm$ **(1 точка)**. ΔOCM≅ΔOCQ⇒∠OCM=∠OCQ=α и ∠OCM=∠BOC=α(кръстни ъгли)⇒ ΔOBC- равнобедрен⇒ $OB=BC$ **(1 точка)** и OP=PC=6,5**(0,5 точки)**.
Аналогично се доказва, че $AO=AD$**(1 точка)**.



От $\Delta OBP \sim \Delta COM \Rightarrow \dfrac{BO}{CO} = \dfrac{OP}{MC}$

$\Rightarrow \dfrac{BO}{13} = \dfrac{6,5}{5} \Rightarrow BO = 16,9\ cm = BC$ **(1 точка)**

По аналогичен начин намираме, че $AO = 12,5\ cm = AD$ **(1 точка)** ⇒ $P_{ABCD} = 72,8\ cm$ **(0,5 точки)**.