МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

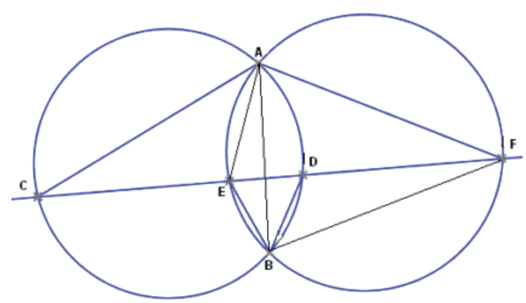
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

IX клас

Зад.1 Полагаме $t=\left(x^2+x+1\right)^2$ **(0,5 точки)** и тогава уравнението
$\left(x^2+x+1\right)^4-10\left(x^2+x+1\right)^2+9=0 \Leftrightarrow t^2-10t+9=0 \Rightarrow t_1=1, t_2=9$
$\Rightarrow x^2+x+1=\pm1$ или $x^2+x+1=\pm3$ **(2 точки)**.
Уравненията $x^2+x+2=0$ и $x^2+x+4=0$ нямат реални корени**(2 точки)**.
Корените на $x^2+x=0$ са $x_1=0, x_2=-1$ **(1 точка)**, а корените на $x^2+x-2=0$ са $x_3=1, x_4=-2$ **(1 точка)**$\Rightarrow$най-малкият корен на даденото уравнение е $x=-2$ **(0,5 точки)**.

Зад.2 а) Нека търсеното уравнение е $y^2+py+q=0$ с корени $y_1=x_1+x_2$ и $y_2=x_1x_2$.
Съгласно формулите на Виет имаме $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ за уравнението $ax^2+bx+c=0$ **(0,5 точки)** и $y_1+y_2=-p$, $y_1y_2=q$ за уравнението $y^2+py+q=0$ **(0,5 точки)**
$\Rightarrow$ $p=-(y_1+y_2)=\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{a}=\dfrac{b-c}{a}$ **(1 точка)**, $q=y_1y_2=-\dfrac{b}{a}.\dfrac{c}{a}=-\dfrac{bc}{a^2}$ **(1 точка)** и получаваме уравнението $y^2+\dfrac{b-c}{a}y-\dfrac{bc}{a^2}=0 \Leftrightarrow a^2y^2+a(b-c)y-bc=0$ **(0,5 точки)**.
б)Преобразуваме лявата страна на равенството и получаваме$\left(x^2+x+1+\dfrac{k}{x-1}\right)\left(x^2-x+1-\dfrac{2}{x+1}\right)=\left(x^2+x+1\right)\dfrac{x^3-1+k}{x+1}$ **(1,5 точки)**.
Тъй като $x^2+x+1>0$ за $\forall\, x$**(1 точка)**, то равенството
$\left(x^2+x+1\right)\dfrac{x^3-1+k}{x+1}=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$ е тъждество, когато $\dfrac{x^3-1+k}{x+1}=$
$=\left(x^2-x+1\right)\Leftrightarrow x^3-1+k=x^3+1 \Rightarrow k=2$**(1 точка)**.



Зад.3 а) Нека $\angle CAE=x$, $\angle DBF=$y и $\angle EFB=\alpha$.
$\angle EFB=\angle EAB=\alpha$.(вписани ъгли) **(1 точка)**.
$\angle CAB=\angle CAE+\angle EAB=x+\alpha=\angle CDB$(вписани ъгли)**(1 точка)**.
$\angle CDB=\angle DBF+\angle BFD$ (външен ъгъл)=y+$\alpha\Rightarrow x+\alpha=$ y+α
$\Rightarrow x=y \Leftrightarrow \angle CAE=\angle DBF$**(1 точка)**.
б)В $\Delta\, ACF$ е изпълнено $\angle CAF+\angle ACF+\angle CFA=180^0$ **(1 точка)**, но $\angle ACF=\angle ACD=\angle ABD$ (вписани ъгли) **(1 точка)** и $\angle CFA=\angle EFA=\angle EBA$(вписани ъгли) **(1 точка)**.
От $\angle CAF+\angle ABD+\angle EBA=180^0$ и $\angle ABD+\angle EBA=\angle$ DBE$\Rightarrow\angle DBE+\angle CAF=180^0$ **(1 точка)**.